

**Caracterizações de Subvariedades
Marginalmente Aprisionadas em
Formas Espaciais**

Ivo Terek Couto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Lyberopoulos

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Março de 2018

Caracterizações de Subvariedades Marginalmente Aprisionadas em Formas Espaciais

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 29/03/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Alexandre Lyberopoulos (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Fernando Manfio - ICMC-USP
- Prof. Dr. Pedro Lauridsen Ribeiro - UFABC

Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos:

Ao professor Alexandre LyMBERopoulos, pela excelente orientação, apoio constante, amizade, e pelas várias oportunidades de testar os meus próprios limites. Ao professor Antonio de Pádua, por sempre compartilhar ideias interessantes e me incentivar a continuar crescendo, e à professora Rosa Chaves por toda a torcida.

Aos professores Pedro Lauridsen Ribeiro e Fernando Manfio por aceitarem participar da Comissão Julgadora deste trabalho, por todos os comentários e sugestões valiosas.

Ao Luiz Fushimi por me ajudar a manter um ritmo aceitável de trabalho, e ao Pedro Brack por sempre nos chamar para os seus incríveis recitais de piano.

Aos amigos, por todos os momentos em que passamos juntos no IME, e fora dele também. Em particular à Olivia, por várias vezes não me deixar ser mais uma vítima da "síndrome do impostor".

À Ana Paula, da secretaria de pós-graduação, por inúmeras vezes me evitar dores de cabeça burocráticas de forma brilhante, e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Aos meus amigos de longa data Icaro, Ana, Marina, Caio, Cristiane, Augusto e Rafael, por sempre se manterem presentes apesar de acabarmos trilhando caminhos diferentes.

Aos meus pais, Luiza e Carlos, por aguentarem o meu temperamento ruim.

E à Juliana, por todo o carinho.

Resumo

COUTO, I. T. **Caracterizações de Subvariedades Marginalmente Aprisionadas em Formas Espaciais**. 2018. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

Neste trabalho, estudamos as subvariedades das formas espaciais pseudo-Riemannianas $\mathbb{M}_\nu^n(c)$ com vetor curvatura média de tipo luz, chamadas *marginalmente aprisionadas*, explorando as relações desta condição (motivada pela Física) com várias outras hipóteses de caráter geométrico, como λ -isotropia, presença de nulidade relativa e invariância por um certo grupo de transformações de Lorentz. Em particular, apresentamos vários resultados de classificação e rigidez de superfícies marginalmente aprisionadas nos espaços de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 , de Sitter \mathbb{S}_1^4 e anti-de Sitter \mathbb{H}_1^4 nestes contextos, adaptando e generalizando resultados de [30], [39], [40], [46] e [49].

Palavras-chave: superfícies marginalmente aprisionadas, geometria Lorentziana, relatividade geral.

Abstract

COUTO, I. T. **Characterizations of Marginally Trapped Submanifolds in Space-Forms**. 2018. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

In this work, we study the submanifolds of pseudo-Riemannian space forms $\mathbb{M}_\nu^n(c)$ with lightlike mean curvature vector, called *marginally trapped*, exploring the relations of this condition (motivated by Physics) with several other assumptions of geometric character, such as λ -isotropy, presence of relative nullity and invariance by a certain group of Lorentz transformations. In particular, we prove several rigidity and classification results for marginally trapped surfaces in Lorentz-Minkowski space \mathbb{L}^4 , de Sitter space \mathbb{S}_1^4 and anti-de Sitter space \mathbb{H}_1^4 in these settings, adapting and generalizing results from [30], [39], [40], [46] and [49].

Keywords: marginally trapped surfaces, Lorentz geometry, general relativity.

Sumário

| | |
|---|-------------|
| Lista de Figuras | viii |
| Introdução | 1 |
| 1 Ambientes pseudo-Riemannianos | 7 |
| 1.1 Álgebra Linear e cercanias | 7 |
| 1.1.1 Espaços pseudo-Euclidianos | 7 |
| 1.1.2 Isometrias de \mathbb{R}_ν^n | 13 |
| 1.1.3 Produto vetorial | 17 |
| 1.2 Geometria pseudo-Riemanniana | 20 |
| 1.2.1 Variedades pseudo-Riemannianas | 20 |
| 1.2.2 Teoria de subvariedades <i>in the large</i> | 28 |
| 2 Aprisionamento versus isotropia | 35 |
| 2.1 Definição e exemplos | 35 |
| 2.2 Referenciais de Penrose e uma caracterização para II tipo luz | 41 |
| 2.3 Superfícies isotrópicas em formas espaciais Lorentzianas | 50 |
| 2.3.1 Isotropia e pseudo-umbilicidade | 50 |
| 2.3.2 Isotropia e umbilicidade | 52 |
| 2.3.3 Rigidez de subvariedades 0-isotrópicas $M^n \subseteq \mathbb{M}_\nu^{n+2}(c)$ | 55 |
| 3 Superfícies marginalmente aprisionadas com nulidade relativa positiva | 57 |
| 3.1 Espaços de nulidade relativa | 57 |
| 3.1.1 Equações de estrutura | 57 |
| 3.1.2 Definição e propriedades básicas | 59 |
| 3.2 A classificação em \mathbb{L}^4 | 62 |
| 3.3 A classificação em \mathbb{S}_1^4 e \mathbb{H}_1^4 | 67 |
| 4 Superfícies marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^4 e invariantes por impulsos | 81 |
| 4.1 Impulsos de Lorentz | 81 |
| 4.2 O aparato para uma superfície invariante | 83 |
| 4.3 Representação de Haesen-Ortega | 86 |
| 4.4 Colando superfícies $\mathfrak{I}mp$ -invariantes e outras consequências | 90 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| A | Curvas de tipo luz e semi-luz em \mathbb{L}^3 | 97 |
| A.1 | Referenciais de Cartan e o Teorema Fundamental | 97 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Interpretando geometricamente os tipos causais de vetores em \mathbb{L}^3 | 8 |
| 1.2 | Interpretando geometricamente os tipos causais de planos em \mathbb{L}^3 | 9 |
| 2.1 | Referencial de Penrose normal à uma subvariedade de tipo espaço $M^n \subseteq \mathbb{L}^{n+2}$. . . | 42 |
| 2.2 | Interpretação física para (L_+, L_-) | 44 |
| 2.3 | Interpretação física para (L_+, L_-) , parte 2. | 44 |
| 2.4 | Coordenadas de tipo luz em \mathbb{L}^2 | 46 |
| 2.5 | Domínio para uma imersão isométrica cheia | 49 |
| 4.1 | A ação de R_θ^h em \mathbb{L}^2 | 82 |
| 4.2 | Cortes de regiões invariantes por impulsos. | 83 |
| 4.3 | Construção de um referencial de Penrose a partir de um referencial ortonormal. . . | 85 |
| 4.4 | Esboço (ruim) da ação de uma função “interruptora” ε | 86 |
| 4.5 | Funções solavanco. | 91 |
| 4.6 | Colagem de geratrizes de superfícies w-marginalmente aprisionadas. | 92 |
| A.1 | Orientações de um plano degenerado. | 99 |
| A.2 | A forma canônica local de α | 104 |

Introdução

Se $(\bar{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade Riemanniana, uma subvariedade $M \subseteq \bar{M}$ é dita *mínima* se o seu vetor curvatura média é identicamente nulo: $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Para subvariedades com bordo, tal condição reflete-se geometricamente no (na verdade, é equivalente ao) fato de tais subvariedades serem pontos críticos do funcional volume:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(M_t) = 0,$$

onde M_t é uma variação de M , dentro de \bar{M} , que fixa o bordo de M . Mostra-se (vide, por exemplo, Anciaux em [25] ou Osserman em [9]) que tais subvariedades na verdade minimizam localmente este funcional volume.

Outra condição relacionada com esta é a seguinte: M é dita *totalmente geodésica* se a sua Segunda Forma Fundamental é identicamente nula: $\mathbf{II} = \mathbf{0}$. Claramente, se M é totalmente geodésica, M é mínima. Tais subvariedades não possuem curvatura extrínseca, visto que a equação de Gauss reduz-se simplesmente à

$$R(X, Y, Z, W) = \bar{R}(X, Y, Z, W),$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, onde R e \bar{R} denotam os tensores de curvatura das conexões de Levi-Civita de M e \bar{M} , respectivamente. A classificação de tais subvariedades é conhecida em diversos ambientes (por exemplo, as subvariedades conexas, completas e totalmente geodésicas de \mathbb{R}^n são subespaços afins, enquanto as de S^n são as grandes sub-esferas¹) e pode ser encontrada em vários materiais, como [6] ou [15].

Nossa atenção, entretanto, será voltada para ambientes *pseudo-Riemannianos*, ou seja, aqueles em que \bar{M} está munida de uma métrica não-degenerada, mas não necessariamente positiva-definida $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Não podemos deixar de introduzir a nomenclatura clássica: um vetor tangente $v \neq \mathbf{0}$ é dito de *tipo espaço, tempo* ou *luz* conforme $\langle v, v \rangle$ seja positivo, negativo, ou zero. Esta terminologia se estende de maneira natural para subvariedades de \bar{M} .

Define-se, como no caso Riemanniano, um certo funcional volume, e mostra-se novamente (Anciaux, em [25]) que uma subvariedade (com métrica induzida também não-degenerada) é um ponto crítico de tal funcional volume se e somente se o seu vetor curvatura média é identicamente nulo. Todavia, deixa de ser verdade que tais subvariedades minimizam localmente o volume. Por exemplo, hipersuperfícies de tipo espaço no *espaço de Lorentz-Minkowski*

$$\mathbb{L}^n \doteq \left(\mathbb{R}^n, (dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 - (dx^n)^2 \right)$$

são máximas para o volume.

A relação $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ é a condição puramente pseudo-Riemanniana mais simples envolvendo curvaturas, e implica minimalidade no caso Riemanniano, sendo relevante não apenas do ponto de vista da Geometria Diferencial, mas também possuindo interpretações provenientes da

¹Interseções de S^n com subespaços vetoriais de \mathbb{R}^{n+1} .

Relatividade Geral em certas situações.

Quando o índice da métrica pseudo-Riemanniana é 1, esta é dita *Lorentziana*. Um *espaço-tempo* é então uma variedade Lorentziana conexa, munida de um campo de vetores de tipo tempo definido globalmente, que nos permite definir matematicamente as noções de *futuro* e *passado* (vide, por exemplo, Beem, et al. em [13], ou Hawking e Ellis em [4]). Dois exemplos clássicos são o próprio *espaço de Lorentz-Minkowski* \mathbb{L}^n mencionado acima, sendo o modelo mais simples de espaço-tempo livre de forças gravitacionais, utilizado na Relatividade Especial (vide Naber em [12], ou Terek e Lyberopoulos em [27] para aspectos geométricos), e o *espaço de Schwarzschild*, usado para modelar (entre outras coisas) o sistema solar ou as proximidades de um buraco negro massivo (vide Carroll em [16]).

Na Física, as métricas de todos os modelos considerados são soluções das celebradas *equações² de campo de Einstein*, apresentadas em uma série de artigos no início do século XX:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = 8\pi T,$$

onde Ric, g e T denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, a métrica³, e o tensor de energia-momento do espaço-tempo, enquanto S denota a curvatura escalar da métrica. Já a constante Λ é chamada a *constante cosmológica* do modelo, sendo interpretada como a densidade de energia no vácuo do espaço. Tais equações tornam ainda mais explícita a relação entre Geometria e Relatividade, medindo como a curvatura de um espaço-tempo reage à presença de energia-momento.

Na ausência de energia-momento, ou seja, quando $T = 0$, temos duas particulares soluções das equações de Einstein que merecem um certo destaque: o espaço de *de Sitter* S_1^n e o espaço de *anti-de Sitter* H_1^n . Tais espaços possuem curvatura constante positiva e negativa, respectivamente, sendo análogos Lorentzianos diretos da esfera S^n e do espaço hiperbólico H^n , do mesmo modo que \mathbb{L}^n está para \mathbb{R}^n . O espaço S_1^n possui $\Lambda > 0$, sendo então um possível modelo cosmológico para o universo em expansão, quando $n = 4$. O espaço H_1^n , por sua vez, possui $\Lambda < 0$ e admite curvas de tipo tempo fechadas (indicando a possibilidade de viagens no tempo) e, portanto, é um modelo menos adequado para o universo. Apesar disto, o espaço H_1^n , bem como o seu recobrimento universal, são amplamente utilizados no estudo de várias outras teorias, como por exemplo em gravidade quântica, teoria das cordas e correspondência AdS/CFT.

Em suma, os espaços acima discutidos são conhecidos como as *formas espaciais Lorentzianas*:

$$\mathbb{M}_1^n(c) = \begin{cases} \mathbb{L}^n, & \text{se } c = 0, \\ S_1^n, & \text{se } c = 1, \\ H_1^n, & \text{se } c = -1, \end{cases}$$

e serão de suma importância para este trabalho, bem como suas subvariedades.

Uma superfície de um espaço-tempo é dita *aprisionada no futuro* (resp. *passado*) se o seu vetor curvatura média for de tipo tempo e futuro-dirigido (resp. passado-dirigido), em todos os pontos. A noção de “superfície aprisionada” foi apresentada inicialmente em 1965 por Penrose em [29], no início do desenvolvimento da teoria de buracos negros. Geometricamente, a condição sobre H nos diz que os raios de luz que partem da superfície devem convergir. Em espaços-tempo com simetria esférica, a existência de superfícies aprisionadas juntamente com a hipótese de que a matéria tem densidade de energia positiva (a chamada *condição de energia fraca*) garante⁴

²O uso do plural deve-se ao fato da equação ser geralmente apresentada em termos das componentes dos tensores envolvidos, consistindo então de um sistema de 10 equações diferenciais parciais.

³Curiosidade: a notação $g_{\mu\nu}$ para as componentes da métrica de um espaço-tempo foi adotada por Einstein e Grossmann por volta de 1910, ao notarem inicialmente que a métrica parecia depender da quantidade de matéria em gravitação na região estudada. A letra g vem exatamente da palavra “gravity”. Veja [20].

⁴A *conjectura da superfície aprisionada* diz que uma superfície aprisionada é formada quando uma certa quantidade de matéria é acumulada em um volume suficientemente pequeno, sugerindo que a concentração de matéria leva a

o colapso gravitacional de todo o sistema para um buraco negro, cujo horizonte de evento é então localizado pela superfície aprisionada.

Já as superfícies cujo vetor curvatura média é de tipo luz (ou seja, $\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$ satisfazendo a tal condição $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$) são chamadas *marginalmente aprisionadas* e são realizadas neste contexto, por exemplo, como seções dos horizontes de evento de buracos negros estacionários, separando as superfícies aprisionadas das não-aprisionadas. Para maiores detalhes sobre estes conceitos em Relatividade Geral, indicamos Chrusciel, et al, em [44].

Entretanto, a noção de subvariedade marginalmente aprisionada faz sentido em ambientes pseudo-Riemannianos quaisquer, não dependendo dos conceitos de futuro e passado, e das dimensões envolvidas. Devido à analogia com subvariedades mínimas, tais subvariedades também são chamadas *quase-mínimas* ou *pseudo-mínimas* (por exemplo, vide Milousheva e Turgay em [52] ou Chen em [26]). Além disto, fazendo um paralelo com as subvariedades totalmente geodésicas em ambientes Riemannianos, torna-se natural também investigar o que acontece quando a Segunda Forma Fundamental é de tipo luz.

Neste trabalho, adotando um ponto de vista puramente matemático, veremos classificações de subvariedades marginalmente aprisionadas em formas espaciais, explorando a relação da condição $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0$ com diversas outras hipóteses de caráter geométrico. A estrutura dos capítulos é a seguinte:

- No Capítulo 1 estabelecemos a linguagem e a notação a serem utilizadas no restante do texto, registrando alguns resultados básicos sobre Álgebra Linear nos espaços \mathbb{R}_v^n (que são os protótipos de espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produtos pseudo-Euclidianos), e sobre Geometria Pseudo-Riemanniana em geral. Algumas demonstrações, apesar de não serem demasiadamente complicadas, não parecem ser facilmente encontradas na literatura e, portanto, estão redigidas aqui. Já outras encontram-se em [2], por exemplo. Em particular, destacamos
 - o Teorema 1.1.11 (p. 11), Processo de Gram-Schmidt (realizado a partir de uma base satisfazendo uma certa condição de cadeia);
 - a Proposição 1.1.12 (p. 11), sobre o tamanho máximo de um conjunto de vetores de tipo luz linearmente independentes em \mathbb{R}_v^n , e;
 - o Teorema 1.1.20 (p. 15), relacionando os determinantes das partes espacial e temporal de uma transformação pseudo-ortogonal em $O_v(n, \mathbb{R})$.

Na sequência, introduzimos formalmente variedades pseudo-Riemannianas, e lançamos mão de derivações tensoriais e isomorfismos musicais a fim de motivar as condições que caracterizam a sua conexão de Levi-Civita. Concluímos o capítulo discutindo um pouco da teoria de subvariedades, e registramos as equações fundamentais de uma imersão isométrica.

- No Capítulo 2, apresentamos formalmente a principal definição deste trabalho: a de subvariedade marginalmente aprisionada. Inicialmente, analisamos em detalhes vários exemplos concretos de subvariedades marginalmente aprisionadas em alguns ambientes para levantar perguntas a serem respondidas no restante do trabalho. Na sequência, estudamos Referenciais de Penrose (*null frames*) (L_+, L_-) ao longo de subvariedades não-degeneradas de codimensão 2, e listamos algumas expressões relevantes no Lema 2.2.1 (p. 41). Utilizando estes referenciais, seguimos Anciaux em [49] e obtemos os teoremas 2.2.4 (p. 47) e 2.2.5 (p. 48), que nos dizem como são as subvariedades com Segunda Forma Fundamental de tipo luz em $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$.

um colapso gravitacional. Esta conjectura na verdade foi provada para a gravitação “pura” por Christodoulou em 2008, em [21].

Motivados por estes resultados, seguimos Cabrerizo, Fernández e Gómez em [46] e introduzimos uma noção de isotropia na Seção 2.3. Exploramos algumas relações desta noção com os conceitos de umbilicidade e pseudo-umbilicidade definidos no Capítulo 1, e apresentamos alguns resultados de rigidez para tais subvariedades. Generalizamos alguns resultados apresentados em [46], destacando

- o Lema 2.3.2 (p. 50), que caracteriza a isotropia em um ponto em termos de uma certa expressão algébrica;
 - o Lema 2.3.3 (p. 51), que continua válido tanto para superfícies Riemannianas como Lorentzianas, em ambientes de índice arbitrário;
 - o Teorema 2.3.4 (p. 52), que agora também estabelece a equivalência de isotropia e pseudo-umbilicidade para superfícies Lorentzianas marginalmente aprisionadas em ambientes de dimensão 4 e índice 2, e;
 - os teoremas 2.3.14 (p. 55) e 2.3.17 (p. 56), agora sobre rigidez de subvariedades 0-isotrópicas de codimensão 2 em formas espaciais pseudo-Riemannianas $\mathbb{M}_V^{n+2}(c)$, de qualquer índice.
- No Capítulo 3, definimos o que é o espaço de nulidade relativa de uma subvariedade não-degenerada de uma variedade pseudo-Riemanniana, e seguimos Chen e Van der Veken em [40] para classificar as superfícies marginalmente aprisionadas em $\mathbb{M}_1^4(c)$ com nulidade relativa positiva. Na primeira seção recordamos brevemente a linguagem de formas diferenciais, e construímos na Proposição 3.1.8 (p. 61) uma parametrização conveniente para realizar os cálculos necessários. Como é frequente, o tratamento nos casos $c = 0$ e $c \neq 0$ é feito separadamente. No Teorema 3.2.1 (p. 62) é dada a classificação no ambiente \mathbb{L}^4 , mas o capítulo atinge seu ápice na longa e árdua demonstração dos teoremas 3.3.3 e 3.3.4 (para \mathbb{S}_1^4 e \mathbb{H}_1^4 , respectivamente), que consiste de diversos casos e subcasos.
 - No Capítulo 4, estudamos as superfícies de tipo espaço em \mathbb{L}^4 que são invariantes por impulsos, isto é, invariantes sob a ação de um certo grupo de transformações \mathfrak{Imp} , seguindo Haesen e Ortega em [39]. Iniciamos a discussão com estas transformações e aplicamos parte da maquinaria desenvolvida no Capítulo 1 a fim de obter expressões para as curvaturas de tais superfícies, lançando mão de uma parametrização adequada. No Teorema 4.3.2 (p. 87), finalmente obtemos uma representação integral para as superfícies de tipo espaço, invariantes por impulsos e marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^4 . O segundo astro principal deste capítulo é o Teorema 4.4.2 (p. 91), que ilustra um processo de colagem para superfícies w -marginalmente aprisionadas. De posse destes resultados, concluímos a discussão obtendo uma série de consequências, como por exemplo a não-existência de superfícies críticas, invariantes por impulsos e com curvatura Gaussiana constante em \mathbb{L}^4 (Corolário 4.4.5, p. 93).

Concluído o corpo principal do texto, estudamos no Apêndice A as subvariedades marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^3 , que são precisamente as curvas de tipo espaço com plano osculador de tipo luz, pelo Teorema 2.2.4 (visto no Capítulo 2). Obtemos no Teorema A.1.16 (p. 105) uma classificação para tais curvas, a menos de transformações de Poincaré, utilizando um único invariante \mathfrak{T} que faz simultaneamente os papeis da curvatura e da torção na teoria clássica de curvas e superfícies em \mathbb{R}^3 . Torna-se claro neste ponto que a mesma técnica utilizada para desenvolver esta teoria de curvas em \mathbb{L}^3 na verdade funciona também para o ambiente $\mathbb{M}_1^3(c)$ (seja aplicando a maquinaria sobre produtos vetoriais apresentada no Capítulo 1 para \mathbb{L}^4 ou \mathbb{R}_2^4 , ou então definindo a noção “correta” de produto vetorial em $\mathbb{M}_1^3(c)$ via a 3-forma de volume de cada ambiente).

Finalmente, alguns comentários sobre como ler este trabalho. Prezando pela didática e clareza do texto, apresentamos diversas figuras no decorrer do trabalho, produzidas utilizando o

software `xfig`. Além disto, uniformizamos a convenção de assinatura para o produto em \mathbb{R}_v^n , colocando os sinais negativos no final ao invés do começo. Então, ao comparar o feito aqui com alguma referência que use a convenção com os sinais negativos, deve-se aplicar o isomorfismo “ler as componentes de trás para a frente”. Em algumas demonstrações de resultados, argumentos particularmente técnicos mas não relevantes o suficiente para receberem o nome de “Lema” foram batizados de “Afirmações”, com suas “Justificativas” (não menos rigorosas) redigidas em fonte reduzida (por exemplo, a primeira ocorrência disto é na página 47), com o objetivo de organizar “blocos” de raciocínio.

Por fim, a interdependência entre os capítulos é simples: o Capítulo 1 é necessário para todos os outros e é recomendado para o Apêndice A, enquanto a Seção 2.2 do Capítulo 2 (sobre referenciais de Penrose) é recomendada para todos os capítulos seguintes.

Tendo me alongado o suficiente, termino aqui esta introdução e desejo-lhes uma boa leitura.

“Quem mais do que eu
Diz a superfície pura e simples?

Quem mais do que eu
Não diz outra coisa?

Assim convido,
A percorrer,
Permanecer,

Alongar minhas bordas
Para ver bem mais longe
Se algo houver para ver.”

Eugène Guillevic (1907–1997)
“Trapèze” (Euclidiennes)

Capítulo 1

Ambientes pseudo-Riemannianos

1.1 Álgebra Linear e cercanias

Encaramos aqui a Álgebra Linear como “geometria estática”, a ser aplicada ponto a ponto para os espaços tangentes das variedades com as quais lidaremos no decorrer deste trabalho. Assim, registramos algumas definições e resultados básicos sobre espaços pseudo-Euclidianos e suas isometrias. Para maiores detalhes, recomendamos as referências [18] e [27].

1.1.1 Espaços pseudo-Euclidianos

Definição 1.1.1 (\mathbb{R}_v^n). O espaço pseudo-Euclidiano de índice v é o par $\mathbb{R}_v^n \doteq (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_v)$, onde o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ é definido por

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_v \doteq x^1 y^1 + \dots + x^{n-v} y^{n-v} - x^{n-v+1} y^{n-v+1} - \dots - x^n y^n,$$

para $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ e $\mathbf{y} = (y^1, \dots, y^n)$ em \mathbb{R}^n .

Observação.

- Se (V, g) é um espaço vetorial de dimensão finita munido de uma forma bilinear simétrica e não-degenerada (ou seja, $g(x, y) = 0$ para todo y implica que $x = 0$), recorde que o índice de g é a dimensão do maior subespaço de V para o qual a restrição de g é negativa-definida. Temos que (V, g) é equivalente à algum \mathbb{R}_v^n para escolhas convenientes de n e v . Então as definições e resultados a serem aqui apresentados valem também neste contexto.
- É também conveniente denotarmos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_v = \mathbf{x}^\top \text{Id}_{n-v, v} \mathbf{y}$, onde \mathbf{x} e \mathbf{y} são identificados com vetores coluna e $\text{Id}_{n-v, v} \doteq (\eta_{ij}^v)_{1 \leq i, j \leq n}$ é a identidade de índice v , definida por

$$\eta_{ij}^v \doteq \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \leq n - v \\ -1, & \text{se } i = j > n - v \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \text{ e}$$

- Denotamos $\|\mathbf{x}\|_v \doteq \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_v|}$. Porém, $\|\cdot\|_v$ não é uma norma, no sentido estrito da definição.
- Para cada v , o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ é, de fato, não-degenerado: com efeito, denote por $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ a base canônica de \mathbb{R}_v^n , e suponha que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i$ satisfaz $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_v = 0$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_v^n$. Tomar $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i$ prontamente nos dá $x^i = 0$ e, portanto, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Para $v = 0$ temos o espaço Euclidiano usual $\mathbb{R}_0^n \equiv \mathbb{R}^n$.

- Para $\nu = 1$ temos o *espaço de Lorentz-Minkowski* $\mathbb{R}_1^n \equiv \mathbb{L}^n$: o modelo mais simples de espaço-tempo livre de forças gravitacionais, utilizado na Relatividade Especial. Neste contexto, seus pontos também são chamados de eventos.

Definição 1.1.2 (Caráter Causal). Dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}_\nu^n$ é de:

- tipo espaço*, se $\langle v, v \rangle_\nu > 0$, ou $v = \mathbf{0}$;
- tipo tempo*, se $\langle v, v \rangle_\nu < 0$;
- tipo luz*, se $\langle v, v \rangle_\nu = 0$, mas $v \neq \mathbf{0}$.

Se $v \neq \mathbf{0}$ não é um vetor de tipo luz, definimos o *indicador de v* , denotado por ϵ_v , como o sinal de $\langle v, v \rangle_\nu$, isto é, $\epsilon_v = 1$ se v for de tipo espaço, e $\epsilon_v = -1$ se v for de tipo tempo. O conjunto dos vetores de tipo luz em \mathbb{R}_ν^n é chamado o seu *cone de luz*.

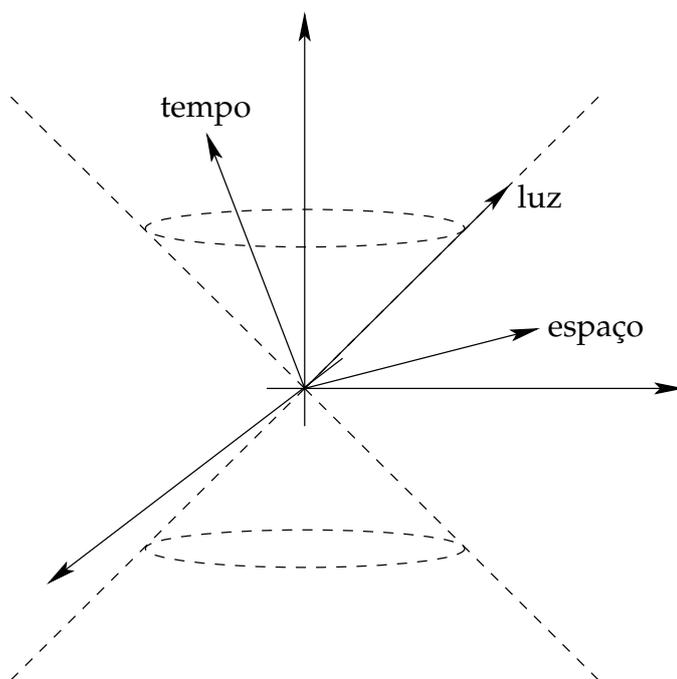


Figura 1.1: Interpretando geometricamente os tipos causais de vetores em \mathbb{L}^3 .

Já deixemos registrada também esta definição para subespaços de \mathbb{R}_ν^n :

Definição 1.1.3. Seja $S \subseteq \mathbb{R}_\nu^n$ um subespaço vetorial não-trivial. Dizemos que S é de

- tipo espaço*, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_{S \times S}$ é positiva-definida;
- tipo tempo*, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_{S \times S}$ é não-degenerada e possui índice 1;
- tipo luz*, se $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_{S \times S}$ é degenerada.

Observação.

- É comum chamarmos subespaços unidimensionais de tipo luz de *raios de luz*.
- Para simplificar, quando S não é de tipo luz, diremos apenas que S é não-degenerado, sem fazer menção à $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu|_{S \times S}$.
- Todo subespaço de \mathbb{L}^n é necessariamente de um dos três tipos causais acima.

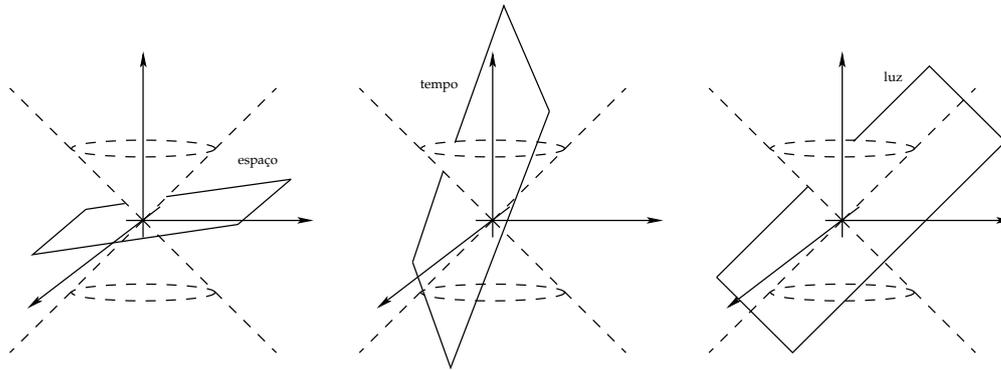


Figura 1.2: Interpretando geometricamente os tipos causais de planos em \mathbb{L}^3 .

A noção de tipo causal para subespaços se relaciona naturalmente com a noção de ortogonalidade, como veremos nos próximos resultados.

Definição 1.1.4 (Ortogonalidade).

- (i) Diremos que $x, y \in \mathbb{R}_v^n$ são v -ortogonais se $\langle x, y \rangle_v = 0$.
- (ii) Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ é v -ortogonal se quaisquer dois vetores distintos em S são ortogonais. Diremos também que S é v -ortonormal se, além de ser ortogonal, todos os vetores em S forem unitários: $\langle x, x \rangle_v \in \{-1, 1\}$ para todo $x \in S$.
- (iii) Se $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ é um subconjunto qualquer, o *espaço v -ortogonal à S* é definido por

$$S^\perp \doteq \{x \in \mathbb{R}_v^n \mid \langle x, y \rangle_v = 0 \text{ para todo } y \in S\}.$$

Observação.

- Quando não houver risco de confusão, omitiremos os prefixos “ v ” nos termos acima definidos (e nos seguintes também).
- A nomenclatura espaço/tempo/luz dada acima provém da Física, porém sua significância é um pouco perdida quando lidamos com produtos escalares de índice $v > 1$, uma vez que agora temos duas (ou mais) direções de tipo tempo ortogonais.
- Uma base ortogonal de \mathbb{R}_v^n não pode conter vetores de tipo luz, uma vez que $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ é não-degenerado.
- Dado $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$, o espaço ortogonal S^\perp é sempre um subespaço de \mathbb{R}_v^n , mesmo que S não o seja. O conjunto S^\perp é essencialmente o *radical* da restrição $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_{S \times S}$.
- Utilizamos o termo “espaço ortogonal” ao invés de “complemento ortogonal” pois, neste caso, não necessariamente temos que se $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ é um subespaço, então $\mathbb{R}_v^n = S \oplus S^\perp$. Um contra-exemplo rápido é visto tomando, em \mathbb{L}^3 , qualquer 2-plano tangente ao cone de luz, como $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{L}^3 \mid y = z\}$ (vide Figura 1.2 acima).

Como no caso Euclideo, vale a:

Proposição 1.1.5. *Seja $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ um subespaço vetorial. Então vale que $\dim S + \dim S^\perp = n$ e, além disto, que $(S^\perp)^\perp = S$.*

Demonstração: Note que a aplicação linear

$$\mathbb{R}_v^n \ni x \mapsto \langle x, \cdot \rangle_v|_S \in S^*$$

é sobrejetora. Com efeito, se $\varphi \in S^*$, tomamos uma extensão linear $\widehat{\varphi} \in (\mathbb{R}_v^n)^*$ de φ ; e $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ ser não-degenerado nos permite chamar o Lema de Riesz, que nos fornece $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_v^n$ tal que $\widehat{\varphi} = \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle_v$. Restringindo à S , temos $\varphi = \langle \mathbf{x}, \cdot \rangle_v|_S$, como afirmado. Além disto, o núcleo de tal aplicação é precisamente S^\perp , de modo que

$$n = \dim S^\perp + \dim S^* = \dim S^\perp + \dim S.$$

É fácil ver que $S \subseteq (S^\perp)^\perp$, mas a fórmula acima aplicada para S^\perp fazendo o papel de S nos diz que $\dim S = \dim (S^\perp)^\perp$, e portanto vale a igualdade $S = (S^\perp)^\perp$. \square

Corolário 1.1.6. *Seja $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ um subespaço vetorial. Então S é não-degenerado se e somente se $\mathbb{R}_v^n = S \oplus S^\perp$. Em particular, S é não-degenerado se e somente se S^\perp também for não-degenerado.*

Demonstração: Inicialmente, note que S é não-degenerado se e somente se $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$. Mas

$$\dim(S + S^\perp) + \dim(S \cap S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp = n,$$

então $S + S^\perp = \mathbb{R}_v^n$ se e somente se $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$. \square

Lema 1.1.7 (Expansão Ortonormal). *Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_i)_{i=1}^n$ uma base ortonormal de \mathbb{R}_v^n . Então todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_v^n$ se escreve como*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \epsilon_{u_i} \langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle_v \mathbf{u}_i.$$

Demonstração: Escreva $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x^j \mathbf{u}_j$. Aplicando $\langle \cdot, \mathbf{u}_i \rangle_v$, obtemos $\langle \mathbf{x}, \mathbf{u}_i \rangle_v = x^i \epsilon_{u_i}$, como desejado. \square

Teorema 1.1.8 (Lei da Inércia - Sylvester). *Toda base ortonormal de \mathbb{R}_v^n possui exatamente $n - \nu$ vetores de tipo espaço e ν vetores de tipo tempo.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_i)_{i=1}^n$ uma base ortonormal de \mathbb{R}_v^n , e suponha que os últimos m vetores são de tipo tempo; devemos então mostrar que $\nu = m$.

A restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ ao subespaço vetorial S gerado pelos últimos m vetores de \mathcal{B} é negativa-definida e, portanto, $\nu \geq m$. Para a desigualdade reversa, seja $W \subseteq \mathbb{R}_v^n$ um subespaço para o qual a restrição $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_{W \times W}$ seja negativa-definida. Defina a projeção em S , $\Pi: W \rightarrow S$ por

$$\Pi(\mathbf{w}) \doteq - \sum_{i=n-m+1}^m \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i \rangle_v \mathbf{u}_i$$

e note que pelo Lema 1.1.7 acima, vale

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n-m} \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i \rangle_v \mathbf{u}_i + \Pi(\mathbf{w}).$$

Vejam que Π é injetora: suponha que $\mathbf{w} \in W$ é tal que $\Pi(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Como \mathbf{w} é de tipo tempo, temos que

$$0 \geq \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_v = \sum_{i=1}^{n-m} \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i \rangle_v^2 \implies \langle \mathbf{w}, \mathbf{u}_i \rangle_v = 0, \quad 1 \leq i \leq n-m.$$

Assim $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, como desejado. Portanto, $\dim W \leq \dim S$ para todo subespaço W cuja restrição $\langle \cdot, \cdot \rangle_v|_{W \times W}$ seja negativa-definida. Isto implica que $\nu \leq m$. \square

Teorema 1.1.9. *Seja $\{\mathbf{0}\} \neq S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ um subespaço não-degenerado. Então S possui uma base ortonormal.*

Demonstração: Por indução em $k = \dim S$. Como S é não-degenerado, existe $v \in S$ tal que $\langle v, v \rangle_v \neq 0$, que podemos supor unitário. Em vista disto, é suficiente provar que em todo subconjunto $S' \subseteq S$ ortonormal, com menos de k elementos, é possível acrescentar um vetor de modo que o conjunto resultante continue ortonormal. Como S' gera um subespaço não-degenerado, temos que o complemento ortogonal deste subespaço é não-degenerado e não-trivial. Basta tomar um vetor unitário neste complemento e adicioná-lo a S' (um tal vetor existe pelo argumento inicial dado). \square

Corolário 1.1.10. *Seja $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ um subespaço não-degenerado. Então $\text{Ind}(S) + \text{Ind}(S^\perp) = v$, onde $\text{Ind}(S)$ e $\text{Ind}(S^\perp)$ denotam os índices da restrição de $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ à S e S^\perp , respectivamente. Em particular, em \mathbb{L}^n , S é de tipo espaço se e somente se S^\perp é de tipo tempo.*

Demonstração: Uma as bases ortonormais de S e S^\perp fornecidas pelo Teorema 1.1.9 acima, obtendo então uma base ortonormal de \mathbb{R}_v^n . A igualdade $\text{Ind}(S) + \text{Ind}(S^\perp) = n$ segue então da Lei da Inércia (Teorema 1.1.8, p. 10) aplicada à S e S^\perp . \square

E, sobre condições adequadas, recuperamos o:

Teorema 1.1.11 (Processo de Gram-Schmidt). *Sejam $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}_v^n$ linearmente independentes tais que para todo $1 \leq i \leq k$ tem-se $\text{span}(v_1, \dots, v_i)$ não-degenerado. Então existem $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \in \mathbb{R}_v^n$ dois a dois ortogonais tais que $\text{span}\{v_i\}_{i=1}^k = \text{span}\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^k$.*

Demonstração: Por indução em k . Para $k = 1$ basta tomar $\tilde{v}_1 = v_1$. Assuma o resultado válido para k , isto é, assumamos construídos $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_k \in \mathbb{R}_v^n$ satisfazendo as propriedades enunciadas.

Afirmamos que nenhum dos \tilde{v}_i é de tipo luz. Com efeito, se fosse, teríamos \tilde{v}_i ortogonal a todos os vetores anteriores, de \tilde{v}_1 até \tilde{v}_{i-1} , e a si mesmo, de modo que $\text{span}\{v_1, \dots, v_i\} = \text{span}\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_i\}$ é degenerado, contradizendo a hipótese. Isto nos permite definir

$$\widetilde{v}_{k+1} \doteq v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, \tilde{v}_i \rangle_v}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle_v} \tilde{v}_i.$$

É claro que $\text{span}\{v_1, \dots, v_{k+1}\} = \text{span}\{\tilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_{k+1}\}$ e, se $1 \leq j \leq k$, temos:

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{v}_{k+1}, \tilde{v}_j \rangle_v &= \left\langle v_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, \tilde{v}_i \rangle_v}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle_v} \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \right\rangle_v \\ &= \langle v_{k+1}, \tilde{v}_j \rangle_v - \sum_{i=1}^k \frac{\langle v_{k+1}, \tilde{v}_i \rangle_v}{\langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_i \rangle_v} \langle \tilde{v}_i, \tilde{v}_j \rangle_v \\ &= \langle v_{k+1}, \tilde{v}_j \rangle_v - \frac{\langle v_{k+1}, \tilde{v}_j \rangle_v}{\langle \tilde{v}_j, \tilde{v}_j \rangle_v} \langle \tilde{v}_j, \tilde{v}_j \rangle_v \\ &= \langle v_{k+1}, \tilde{v}_j \rangle_v - \langle v_{k+1}, \tilde{v}_j \rangle_v = 0, \end{aligned}$$

o que completa a indução. \square

Proposição 1.1.12. *Sejam $u_1, \dots, u_{v+1} \in \mathbb{R}_v^n$ vetores de tipo luz, dois a dois ortogonais. Então (u_1, \dots, u_{v+1}) é linearmente dependente.*

Demonstração: Considere a decomposição $\mathbb{R}_v^n = \mathbb{R}^{n-v} \times \mathbb{R}_v^v$. Sendo $(e_i)_{i=1}^n$ a base canônica de \mathbb{R}_v^n , escreva

$$u_j = x_j + \sum_{i=1}^v a_j^i e_{n-v+i}, \quad 1 \leq j \leq v+1,$$

segundo a decomposição indicada (com todos os \mathbf{x}_j de tipo espaço e ortogonais a cada um dos vetores de tipo tempo na base canônica). Temos que

$$0 = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle_v = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle_v - \sum_{k=1}^v a_i^k a_j^k \implies \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle_v = \sum_{k=1}^v a_i^k a_j^k, \quad 1 \leq i, j \leq v+1.$$

Considere a aplicação linear $A: \mathbb{R}^{v+1} \rightarrow \mathbb{R}^v$ cuja matriz nas bases canônicas tem como entradas precisamente os coeficientes a_i^j , e tome $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^{v+1}) \in \ker A$, não-nulo. Assim temos

$$\left\langle \sum_{i=1}^{v+1} b^i \mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^{v+1} b^j \mathbf{x}_j \right\rangle_v = \sum_{i,j=1}^{v+1} b^i b^j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle_v = \sum_{i,j=1}^{v+1} b^i b^j \sum_{k=1}^v a_i^k a_j^k = (\mathbf{A}\mathbf{b})^\top (\mathbf{A}\mathbf{b}) = 0.$$

Como a combinação $\sum_{j=1}^{v+1} b^j \mathbf{x}_j$ é de tipo espaço, o cálculo acima nos dá que $\sum_{j=1}^{v+1} b^j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$. Vejamos agora que tais coeficientes \mathbf{b} também testemunham que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{v+1})$ é linearmente dependente. Com efeito:

$$\sum_{j=1}^{v+1} b^j \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^{v+1} b^j \mathbf{x}_j + \sum_{i=1}^v \left(\sum_{j=1}^{v+1} b^j a_j^i \right) \mathbf{e}_{n-v+i} = \mathbf{0},$$

uma vez que a segunda parcela se anula devido à $\mathbf{b} \in \ker A$. \square

Vejamos agora algumas particularidades do ambiente Lorentziano:

Corolário 1.1.13. *Dois vetores de tipo luz em \mathbb{L}^n são ortogonais se e somente se são paralelos.*

Teorema 1.1.14 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa). *Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{L}^n$ vetores de tipo tempo. Então vale que $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1| \geq \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$. Ainda mais, a igualdade vale se e somente se \mathbf{u} e \mathbf{v} são paralelos.*

Demonstração: Decomponha $\mathbb{L}^n = \mathbf{u}^\perp \oplus \mathbb{R}\mathbf{u}$ e escreva $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \lambda\mathbf{u}$, para um certo $\lambda \in \mathbb{R}$, e \mathbf{u}_0 de tipo espaço e ortogonal a \mathbf{u} . Por um lado, temos:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 = \lambda^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_1 + \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle_1.$$

Por outro:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1^2 &= \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{u} + \mathbf{u}_0 \rangle_1^2 \\ &= \lambda^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_1^2 \\ &= (\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 - \langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle_1) \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_1 \\ &\geq \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_1 > 0, \end{aligned}$$

usando que \mathbf{u}_0 é de tipo espaço e \mathbf{u} é de tipo tempo. Extraíndo raízes, obtemos $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1| \geq \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$, como queríamos. E por fim, observe que vale a igualdade se e somente se $\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0 \rangle_1 = 0$, ou seja, se $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ (condição tal equivalente à \mathbf{u} e \mathbf{v} serem paralelos). \square

Observação. Um contra-exemplo para este resultado quando $v > 1$ pode ser obtido tomando vetores de tipo tempo ortogonais, como por exemplo $\mathbf{u} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ em \mathbb{R}_2^3 .

Teorema 1.1.15 (Desigualdade triangular reversa). *Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{L}^n$ vetores de tipo tempo, satisfazendo $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$. Então $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_1 \geq \|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1$.*

Demonstração: Como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 < 0$, temos que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ também é de tipo tempo. Agora aplicamos

a Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_1^2 &= -\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle_1 \\
 &= -(\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_1 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1) \\
 &= -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_1 + 2(-\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1) - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_1 \\
 &= \|\mathbf{u}\|_1^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_1| + \|\mathbf{v}\|_1^2 \\
 &\geq \|\mathbf{u}\|_1^2 + 2\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1^2 \\
 &= (\|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1)^2,
 \end{aligned}$$

donde concluímos que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|_1 \geq \|\mathbf{u}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1$, como desejado. \square

1.1.2 Isometrias de \mathbb{R}_v^n

Neste ponto, estudamos um pouco das transformações em \mathbb{R}_v^n que são compatíveis com a geometria de $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$. Em \mathbb{R}^n , uma *isometria* (ou, *movimento rígido*) é uma aplicação $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$.

Em \mathbb{R}_v^n com $v \geq 1$, devido à presença de vetores de tipo tempo, o natural seria “corrigir” a definição de norma, pondo $\|\mathbf{x}\|_v \doteq \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$. Entretanto, temos duas graves inconveniências:

1. Como mencionado anteriormente, a aplicação $\|\cdot\|_v$ não é em geral uma norma. Isto é evidenciado, por exemplo, pela desigualdade triangular reversa (vista no Teorema 1.1.15 acima).
2. Aplicações como $\mathbb{L}^2 \ni (x, y) \mapsto (y, x) \in \mathbb{L}^2$ seriam “isometrias” válidas, mesmo com eixos de tipos causais diferentes sendo geometricamente (e fisicamente) distintos.

Notando que $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um movimento rígido se e somente se

$$\langle F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}), F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) \rangle_0 = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_0$$

para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, podemos generalizar a noção de isometria:

Definição 1.1.16.

- (i) Uma aplicação $F: \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ é uma *isometria* se

$$\langle F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}), F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) \rangle_v = \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_v$$

para todos os $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_v^n$.

- (ii) Uma aplicação linear $\Lambda: \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ é chamada uma *transformação pseudo-ortogonal* se

$$\langle \Lambda \mathbf{x}, \Lambda \mathbf{y} \rangle_v = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_v,$$

para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_v^n$.

Observação.

- O conjunto das isometrias de \mathbb{R}_v^n é denotado por $E_v(n, \mathbb{R})$, e o das transformações pseudo-ortogonais por $O_v(n, \mathbb{R})$. Quando munidos da operação de composição, são ambos grupos. Além disto, $O_v(n, \mathbb{R})$ é fechado por transposições e vale a dualidade $O_v(n, \mathbb{R}) \cong O_{n-v}(n, \mathbb{R})$.
- Para $v = 0$, Λ é chamada apenas uma *transformação ortogonal*. O grupo $E(n, \mathbb{R})$ é chamado o grupo *Euclidiano*, e $O(n, \mathbb{R})$ é o grupo *ortogonal*.

- Para $\nu = 1$, F é chamada uma *transformação de Poincaré* e Λ é chamada uma *transformação de Lorentz*. O grupo $E_1(n, \mathbb{R})$ é chamado o *grupo de Poincaré*, e $O_1(n, \mathbb{R})$ é o *grupo de Lorentz*.

Segue imediatamente da definição que $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ se e somente se $\Lambda^\top \text{Id}_{n-\nu, \nu} \Lambda = \text{Id}_{n-\nu, \nu}$ e, neste caso, temos $\det \Lambda = 1$ ou -1 . Em particular, Λ é não-singular.

Temos uma relação próxima entre $E_\nu(n, \mathbb{R})$ e $O_\nu(n, \mathbb{R})$, ilustrada pelos próximos dois resultados:

Lema 1.1.17. *Seja $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ tal que $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Então $F \in O_\nu(n, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Utilizamos a *identidade de polarização*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\nu = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_\nu + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle_\nu - \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle_\nu),$$

válida para quaisquer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_\nu^n$. Aplicando isto para $F(\mathbf{x})$ e $F(\mathbf{y})$ nos lugares de \mathbf{x} e \mathbf{y} , temos:

$$\langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}) \rangle_\nu = \frac{1}{2} (\langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}) \rangle_\nu + \langle F(\mathbf{y}), F(\mathbf{y}) \rangle_\nu - \langle F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}), F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) \rangle_\nu).$$

Como $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, temos $\langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}) \rangle_\nu = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_\nu$, e analogamente para \mathbf{y} . Assim, as identidades de polarização implicam que $\langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{y}) \rangle_\nu = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_\nu$.

Resta ver que F é linear. Com efeito, considere a base canônica $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ de \mathbb{R}_ν^n . Pelo feito acima, temos que $(F(\mathbf{e}_i))_{i=1}^n$ é um subconjunto ortonormal e, portanto, linearmente independente de \mathbb{R}_ν^n . Como possui n elementos, é uma base. Seja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\nu^n$, escrito como $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i$, e escreva também $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a^i F(\mathbf{e}_i)$. O resultado segue uma vez verificado que $a^i = x^i$, para $1 \leq i \leq n$. Mas $\epsilon_{\mathbf{e}_i} = \epsilon_{F(\mathbf{e}_i)}$ para $1 \leq i \leq n$, e assim o Lema 1.1.7 (p. 10) nos dá que

$$x^i = \epsilon_{\mathbf{e}_i} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_i \rangle_\nu = \epsilon_{F(\mathbf{e}_i)} \langle F(\mathbf{x}), F(\mathbf{e}_i) \rangle_\nu = a^i,$$

como desejado. □

Teorema 1.1.18. *Seja $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$. Então existem únicos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ tais que $F = T_{\mathbf{a}} \circ \Lambda$, onde $T_{\mathbf{a}}$ denota translação por \mathbf{a} . Além disto, se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda_1, \Lambda_2 \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, vale que $T_{\mathbf{a}_1} \circ \Lambda_1 \circ T_{\mathbf{a}_2} \circ \Lambda_2 = T_{\mathbf{a}_1 + \Lambda_1 \mathbf{a}_2} \circ (\Lambda_1 \circ \Lambda_2)$.*

Demonstração: Note que $T_{-F(\mathbf{0})} \circ F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ fixa a origem $\mathbf{0}$ e, portanto, $T_{-F(\mathbf{0})} \circ F = \Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$, pelo Lema 1.1.17 acima. Logo $F = T_{F(\mathbf{0})} \circ \Lambda$, como afirmado. Para a unicidade, suponha que $T_{\mathbf{a}_1} \circ \Lambda_1 = T_{\mathbf{a}_2} \circ \Lambda_2$. Avaliando em $\mathbf{0}$ segue que $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, e a bijetividade de $T_{\mathbf{a}_1}$ implica que $\Lambda_1 = \Lambda_2$. A última afirmação segue de um cálculo direto. □

Observação. Em termos algébricos, temos a caracterização de $E_\nu(n, \mathbb{R})$ como um produto semi-direto de grupos. O Teorema 1.1.18 acima nos diz que a aplicação

$$E_\nu(n, \mathbb{R}) \ni T_{\mathbf{a}} \circ \Lambda \mapsto (\Lambda, \mathbf{a}) \in O_\nu(n, \mathbb{R}) \times_\iota \mathbb{R}_\nu^n$$

é um isomorfismo de grupos, onde $\iota: O_\nu(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow \text{Aut}(\mathbb{R}_\nu^n, +)$ é a inclusão.

A seguinte classificação também nos diz como isometrias “nascem”:

Proposição 1.1.19. *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^n, (\mathbf{w}_i)_{i=1}^n$ duas bases de \mathbb{R}_ν^n tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_\nu = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_\nu$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Então existe uma única $F \in E_\nu(n, \mathbb{R})$ tal que $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ e $DF(\mathbf{p})(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração: O Teorema 1.1.18 acima nos diz que F será da forma $T_{\mathbf{a}} \circ \Lambda$, para únicos $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_\nu^n$ e $\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R})$ adequados. Em particular, F é uma composta de aplicações deriváveis e tem derivada total dada por $DF(\mathbf{x}) = \Lambda$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\nu^n$.

Basta então determinarmos \mathbf{a} e Λ . A condição $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_v = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_v$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ nos diz que Λ definida por $\Lambda \mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$, para todo $1 \leq i \leq n$, de fato é um elemento de $O_v(n, \mathbb{R})$, enquanto a condição $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ nos obriga a ter $\mathbf{a} = \mathbf{q} - \Lambda \mathbf{p}$. \square

Com isto, podemos agora voltar a nossa atenção para as transformações pseudo-ortogonais, apenas. Para entender a estrutura do grupo $O_v(n, \mathbb{R})$, para $v \geq 1$, é conveniente utilizar a decomposição $\mathbb{R}_v^n = \mathbb{R}^{n-v} \times \mathbb{R}_v^v$, escrevendo $\Lambda \in O_v(n, \mathbb{R})$ em blocos:

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda_E & B \\ \hline C & \Lambda_T \end{array} \right),$$

sendo $\Lambda_E \in \text{Mat}(n-v, \mathbb{R})$ e $\Lambda_T \in \text{Mat}(v, \mathbb{R})$ as *partes espacial e temporal* de Λ . Como Λ é não-singular e preserva tipos causais, compondo com as projeções adequadas vemos que Λ_E e Λ_T também são não-singulares. Mais do que isso, temos uma relação concreta entre os seus determinantes, dada pelo:

Teorema 1.1.20. *Sejam $v \geq 1$ e $\Lambda \in O_v(n, \mathbb{R})$. Então vale que $\det \Lambda_E = \det \Lambda_T \det \Lambda$.*

Demonstração: Sendo $\text{can} = (\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ a base canônica de \mathbb{R}_v^n , considere a base ortonormal de \mathbb{R}_v^n formada pelas colunas de Λ , $\mathcal{B} = (\Lambda \mathbf{e}_1, \dots, \Lambda \mathbf{e}_n)$. Suponha que $\Lambda = (\lambda^i_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Vamos “deletar” o bloco B , definindo uma transformação linear $T: \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ por

$$T(\Lambda \mathbf{e}_j) = \begin{cases} \Lambda \mathbf{e}_j, & \text{se } 1 \leq j \leq n-v \text{ e} \\ \sum_{i=n-v+1}^n \lambda^i_j \mathbf{e}_i, & \text{se } n-v < j \leq n. \end{cases}$$

Diretamente temos que $[\Lambda]_{\text{can}, \mathcal{B}} = \text{Id}_n$ e

$$[T]_{\mathcal{B}, \text{can}} = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda_E & \mathbf{0} \\ \hline C & \Lambda_T \end{array} \right).$$

Calculemos agora a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$. A expressão $T(\Lambda \mathbf{e}_j) = \Lambda \mathbf{e}_j$ para $1 \leq j \leq n-v$ nos diz que os blocos superior e inferior esquerdos de $[T]_{\mathcal{B}}$ são, respectivamente, Id_{n-v} e $\mathbf{0}$. Para calcular o determinante de $[T]_{\mathcal{B}}$ por blocos, precisamos das últimas v componentes de $T(\Lambda \mathbf{e}_j)$ na base \mathcal{B} , para $n-v < j \leq n$. Sendo $\epsilon_k \doteq \epsilon_{\mathbf{e}_k}$, aplicando o Lema 1.1.7 (p. 10) temos que

$$\begin{aligned} T(\Lambda \mathbf{e}_j) &= \sum_{i=n-v+1}^n \lambda^i_j \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=n-v+1}^n \lambda^i_j \sum_{k=1}^n \epsilon_k \langle \mathbf{e}_i, \Lambda \mathbf{e}_k \rangle_v \Lambda \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{i=n-v+1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \epsilon_k \lambda^i_j \lambda_k^\ell \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\ell \rangle_v \Lambda \mathbf{e}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=n-v+1}^n \sum_{\ell=1}^n \epsilon_k \lambda^i_j \lambda_k^\ell \eta_{i\ell}^v \right) \Lambda \mathbf{e}_k. \end{aligned}$$

As últimas v componentes procuradas correspondem a $n-v < k \leq n$ e, nestas condições, temos que as entradas do bloco inferior direito de $[T]_{\mathcal{B}}$ são dadas por

$$\sum_{i=n-v+1}^n \sum_{\ell=1}^n -\lambda^i_j \lambda_k^\ell (-\delta_{i\ell}) = \sum_{i=n-v+1}^n \lambda^i_j \lambda_k^i$$

que reconhecemos como a definição da multiplicação entre as matrizes Λ_T^\top e Λ_T , fazendo uma mudança de variável no somatório, caso necessário. Obtemos então que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \text{Id}_{n-\nu} & * \\ \hline 0 & \Lambda_T^\top \Lambda_T \end{array} \right).$$

Em particular, segue que $\det T = (\det \Lambda_T)^2$. Além disto:

$$[T\Lambda]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B},\text{can}}[\Lambda]_{\text{can},\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda_E & 0 \\ \hline C & \Lambda_T \end{array} \right).$$

Daí

$$(\det \Lambda_T)^2 \det \Lambda = \det T \det \Lambda = \det(T\Lambda) = \det \Lambda_T \det \Lambda_E,$$

e finalmente $\det \Lambda_E = \det \Lambda_T \det \Lambda$, como queríamos. \square

Podemos então indexar os elementos de $O_\nu(n, \mathbb{R})$ pelos sinais dos determinantes $\det \Lambda_E$ e $\det \Lambda_T$, obtendo uma partição de $O_\nu(n, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) &\doteq \{\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R}) \mid \det \Lambda_E > 0 \text{ e } \det \Lambda_T > 0\} \\ O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R}) &\doteq \{\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R}) \mid \det \Lambda_E > 0 \text{ e } \det \Lambda_T < 0\} \\ O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R}) &\doteq \{\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R}) \mid \det \Lambda_E < 0 \text{ e } \det \Lambda_T > 0\} \\ O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R}) &\doteq \{\Lambda \in O_\nu(n, \mathbb{R}) \mid \det \Lambda_E < 0 \text{ e } \det \Lambda_T < 0\} \end{aligned}$$

Diremos que os elementos de $O_\nu^{+\bullet}(n, \mathbb{R})$ *preservam a orientação do espaço*, enquanto que os de $O_\nu^{\bullet\uparrow}(n, \mathbb{R})$ *preservam a orientação do tempo* (ou que são *ortocrônicos*). Não somente é possível mostrar que $O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo normal de $O_\nu(n, \mathbb{R})$ (a saber, a componente conexa da identidade, vendo $O_\nu(n, \mathbb{R})$ como um grupo de Lie), mas também é possível expressar as outras três componentes como classes laterais de $O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$, utilizando os *quatro representantes principais*

$$\tau^{+\uparrow} \doteq \text{Id}_n, \quad \tau^{+\downarrow} \doteq \text{Id}_{n-1,1}, \quad \tau^{-\uparrow} \doteq \text{Id}_{1,n-1} \quad \text{e} \quad \tau^{-\downarrow} \doteq \text{diag}(-1, 1, \dots, 1, -1).$$

Explicitamente, temos:

$$O_\nu^{+\downarrow}(n, \mathbb{R}) = \tau^{+\downarrow} \cdot O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}), \quad O_\nu^{-\uparrow}(n, \mathbb{R}) = \tau^{-\uparrow} \cdot O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad O_\nu^{-\downarrow}(n, \mathbb{R}) = \tau^{-\downarrow} \cdot O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R}).$$

Observação. Definindo uma operação em $\{\tau^{+\uparrow}, \tau^{+\downarrow}, \tau^{-\uparrow}, \tau^{-\downarrow}\}$ do modo óbvio via regras de sinais nos índices superiores, obtemos um grupo isomorfo ao *4-grupo de Klein*.

Isto reduz o estudo de $O_\nu(n, \mathbb{R})$ ao de $O_\nu^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$. Por exemplo, em dimensões baixas, temos as seguintes classificações para transformações de Lorentz, cujas provas encontram-se em [27]:

Teorema 1.1.21. *Vale que*

$$O_1^{+\uparrow}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

e, em particular, quaisquer duas matrizes em $O_1^{+\uparrow}(2, \mathbb{R})$ comutam.

Teorema 1.1.22. *Seja $\Lambda \in O_1^{+\uparrow}(3, \mathbb{R})$. Então Λ é conjugada a uma (e somente uma) das seguintes*

matrizes, para uma escolha conveniente de φ ou θ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ 0 & \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -\theta & \theta \\ \theta & 1 - \theta^2/2 & \theta^2/2 \\ \theta & -\theta^2/2 & 1 + \theta^2/2 \end{pmatrix},$$

conforme a reta fixada (ponto a ponto) por Λ é de tipo espaço, tempo ou luz, respectivamente.

Antes de prosseguir, deixamos registrado um último resultado técnico:

Proposição 1.1.23. *Sejam $\Lambda \in O_v(n, \mathbb{R})$ e $S \subseteq \mathbb{R}_v^n$ um subespaço vetorial.*

- (i) $\Lambda[S^\perp] = \Lambda[S]^\perp$;
- (ii) Se $v \in \mathbb{R}_v^n$ é um autovetor de Λ que não é de tipo luz, então seu autovalor associado é 1 ou -1 .
- (iii) Se S é um autoespaço de Λ que contém um autovetor que não é de tipo luz, então todo outro autoespaço de Λ é ortogonal à S .
- (iv) S é Λ -invariante se e somente se S^\perp o for.

Demonstração:

- (i) Segue diretamente de Λ preservar ortogonalidade.
- (ii) Escreva $\Lambda v = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que $\langle v, v \rangle_v = \langle \Lambda v, \Lambda v \rangle_v = \lambda^2 \langle v, v \rangle_v$, e logo $\lambda^2 = 1$.
- (iii) Suponha que S seja o autoespaço de Λ associado ao autovalor λ . Por (ii), $\lambda^2 = 1$. Façamos o caso $\lambda = 1$, sendo o outro análogo. Sejam $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 1$, e $y \in \mathbb{R}_v^n$ tal que $\Lambda y = \mu y$. Se $x \in S$ é qualquer, então

$$\mu \langle x, y \rangle_v = \langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_v = \langle x, y \rangle_v \implies \langle x, y \rangle_v = 0.$$

- (iv) Por (i), basta mostrar uma implicação, então suponha que S é Λ -invariante. Sendo Λ não-singular, $\Lambda[S] \subseteq S$ na verdade implica que $\Lambda[S] = S$, e assim $\Lambda^{-1}[S] = S$. Tome $x \in S^\perp$; devemos mostrar que $\Lambda x \in S^\perp$ também. Para tal, considere $y \in S$ e observe que pelo argumento acima temos $\Lambda^{-1}y \in S$. Assim $\langle \Lambda x, y \rangle_v = \langle x, \Lambda^{-1}y \rangle_v = 0$, como desejado.

□

1.1.3 Produto vetorial

Definição 1.1.24. O produto vetorial de $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}_v^n$ é o vetor $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \doteq v \in \mathbb{R}_v^n$ tal que

$$\langle v, x \rangle_v = \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}),$$

para todo $x \in \mathbb{R}_v^n$.

Observação. A existência e a unicidade de $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ estão garantidas pelo Lema de Riesz aplicado ao funcional linear $\varphi: \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\varphi(x) \doteq \det(x, v_1, \dots, v_{n-1})$, uma vez que $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ é não-degenerado.

Para calcular produtos vetoriais, utilizamos a seguinte:

Proposição 1.1.25. *Sejam $\mathcal{B} = (\mathbf{u}_i)_{i=1}^n$ uma base ortonormal e positiva de \mathbb{R}_v^n e $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^n v_j^i \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}_v^n$, para $1 \leq j \leq n-1$. Denotando por $\epsilon_i \doteq \epsilon_{\mathbf{u}_i}$ os indicadores dos elementos de \mathcal{B} , vale que:*

$$\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} = \begin{vmatrix} \epsilon_1 \mathbf{u}_1 & \cdots & \epsilon_n \mathbf{u}_n \\ v_1^1 & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Demonstração: Por simplicidade, denote $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$. Pelo Lema 1.1.7 (p. 10), temos que $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle_v \mathbf{u}_i$, mas por definição de produto vetorial, cada componente é dada por

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle_v = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & v_1^{i-1} & v_1^{i+1} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & v_{n-1}^{i-1} & v_{n-1}^{i+1} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Com isto, basta reconhecer a expansão ortonormal de \mathbf{v} como a expansão do determinante (formal) dado no enunciado por Laplace, pela primeira linha. \square

Outras propriedades operacionais do produto vetorial seguem diretamente das propriedades do determinante:

Proposição 1.1.26 (Propriedades operacionais).

(i) *A aplicação*

$$(\mathbb{R}_v^n)^{n-1} \ni (\mathbf{v}_i)_{i=1}^{n-1} \mapsto \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}_v^n$$

é multi-linear e alternada.

(ii) $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} = \mathbf{0}$ se e somente se $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{n-1}$ é linearmente dependente.

(iii) $\langle \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_i \rangle_v = 0$ para $1 \leq i \leq n-1$.

O Corolário 1.1.10 (p. 11) nos dá, no caso Lorentziano, a:

Proposição 1.1.27. *Sejam $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{L}^n$ linearmente independentes, e considere $S \doteq \text{span}\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^{n-1}$. Então:*

(i) $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é de tipo espaço se e somente se S é de tipo tempo;

(ii) $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é de tipo tempo se e somente se S é de tipo espaço;

(iii) $\mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ é de tipo luz se e somente se S é de tipo luz;

Outra propriedade útil é dada na:

Proposição 1.1.28. *Sejam $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}_v^n$. Então vale que*

$$\langle \mathbf{u}_1 \times \cdots \times \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1} \rangle_v = (-1)^v \det((\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j \rangle_v)_{1 \leq i, j \leq n-1}).$$

Demonstração: Se $(\mathbf{u}_i)_{i=1}^{n-1}$ ou $(\mathbf{v}_j)_{j=1}^{n-1}$ é linearmente dependente, não há o que fazer. Suponha-os ambos linearmente independentes. Como os dois lados da igualdade proposta são lineares em cada uma das $2n-2$ variáveis envolvidas, e tanto o produto vetorial como o determinante são alternados, podemos supor sem perder generalidade que $\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_{i_k}$ e $\mathbf{v}_\ell = \mathbf{e}_{j_\ell}$, onde $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^n$ é a base canônica de \mathbb{R}_v^n e

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-1} \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-1} \leq n.$$

Prosseguimos com a análise em casos, em termos dos índices i^* e j^* omitidos em cada uma das $(n-1)$ -uplas de índices consideradas.

- Se $i^* \neq j^*$, os dois lados são iguais à zero. Com efeito, o lado esquerdo é igual à $\langle \mathbf{e}_{i^*}, \mathbf{e}_{j^*} \rangle_v = 0$ e o determinante no lado direito possui a i^* -ésima linha e a j^* -ésima coluna consistindo apenas de zeros.
- Se $1 \leq i^* = j^* \leq n - v$, o lado esquerdo é $\langle \mathbf{e}_{i^*}, \mathbf{e}_{i^*} \rangle_v = 1$, e o direito é $(-1)^v \det \text{Id}_{n-1, v} = (-1)^v (-1)^v = 1$.
- Se $n - v < i^* = j^* \leq n$, o lado esquerdo é $\langle \mathbf{e}_{i^*}, \mathbf{e}_{i^*} \rangle_v = -1$, e o direito é $(-1)^v \det \text{Id}_{n-1, v-1} = (-1)^v (-1)^{v-1} = -1$.

□

Sejam então $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1} \in \mathbb{R}_v^n$ linearmente independentes, que não gerem um hiperplano de tipo luz. Considere $\mathbf{v} \doteq \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ e a base $\mathcal{B} \doteq (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v})$ de \mathbb{R}_v^n . É natural indagar-se quando tal base é positiva ou negativa. Para discutir a orientação de tal base, calculamos:

$$\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}) = (-1)^{n-1} \det(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) = (-1)^{n-1} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle_v.$$

Portanto a positividade da base \mathcal{B} depende não só da paridade de n , mas também do caráter causal de \mathbf{v} . Explicitamente: se \mathbf{v} é de tipo espaço, \mathcal{B} é positiva se n é ímpar, e negativa se n é par; se \mathbf{v} é de tipo tempo, \mathcal{B} é par, e negativa se n é ímpar.

Concluimos a discussão sobre Álgebra Linear com um último resultado técnico, fundamental para o restante deste texto:

Teorema 1.1.29 (Traço). *Sejam Z um espaço vetorial qualquer e $B: \mathbb{R}_v^n \times \mathbb{R}_v^n \rightarrow Z$ uma aplicação bilinear. Então se $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^n$ e $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^n$ são bases ortonormais de \mathbb{R}_v^n , vale que*

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_{\mathbf{v}_i} B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \epsilon_{\mathbf{w}_i} B(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i).$$

Tal quantidade é então denominada o traço de B em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$ e é denotada por $\text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_v} B$.

Demonstração: Pela Lei da Inércia (Teorema 1.1.8, p. 10) podemos, reordenando se necessário, supor que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_v = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_v = \eta_{ij}^v$ e, em particular, que $\epsilon_i \doteq \epsilon_{\mathbf{v}_i} = \epsilon_{\mathbf{w}_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Aplicando o Lema 1.1.7 (p. 10) sucessivamente, temos

$$\mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^n \epsilon_k \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_k \rangle_v \mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \epsilon_i \epsilon_k \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_k \rangle_v \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \rangle_v \right) \mathbf{w}_i,$$

donde

$$\sum_{k=1}^n \epsilon_i \epsilon_k \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_k \rangle_v \langle \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_i \rangle_v = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

por independência linear dos $(\mathbf{w}_j)_{j=1}^n$. Com isto, calculamos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \epsilon_i B(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) &= \sum_{i=1}^n B \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_j \rangle_v \mathbf{w}_j, \sum_{k=1}^n \epsilon_k \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_k \rangle_v \mathbf{w}_k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \epsilon_k \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \epsilon_j \langle \mathbf{w}_j, \mathbf{v}_i \rangle_v \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_k \rangle_v \right) B(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^n \epsilon_k \delta_{jk} B(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \epsilon_k B(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k), \end{aligned}$$

como desejado. □

1.2 Geometria pseudo-Riemanniana

Nesta seção apresentamos as definições e conceitos básicos sobre os ambientes no qual se passarão a nossa discussão: variedades pseudo-Riemannianas. Discutiremos um pouco da teoria de subvariedades neste contexto, e concluímos o capítulo apresentando a definição de subvariedades marginalmente aprisionadas, bem como diversos exemplos. Para mais detalhes, indicamos [18], [17] e [14].

1.2.1 Variedades pseudo-Riemannianas

Definição 1.2.1. Seja M uma variedade diferenciável. Uma *métrica pseudo-Riemanniana* em M é uma escolha, para cada $p \in M$, de um produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ não-degenerado no espaço tangente $T_p M$, tal que

- (i) a escolha dependa suavemente de p , ou seja, dados quaisquer campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação

$$M \ni p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R}$$

é suave;

- (ii) o índice $\text{Ind}(\langle \cdot, \cdot \rangle) \doteq \text{Ind}(\langle \cdot, \cdot \rangle_p)$ é constante (independe de $p \in M$).

Diremos que o par $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma *variedade pseudo-Riemanniana*.

Observação.

- Se M é conexa, a condição (ii) é automaticamente satisfeita. Assumiremos daqui em diante que este é o caso.
- É usual denotar $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ e omitir o p em tal notação, quando não há risco de confusão.
- Dizemos que a métrica é *Riemanniana* quando seu índice é 0 (ou seja, quando todos os produtos escalares são positivo-definidos), e *Lorentziana* quando seu índice é 1.

A existência de métricas Riemannianas em qualquer variedade diferenciável é garantida por um argumento padrão utilizando partições da unidade, ou então, apelando para o famoso *Teorema da Imersão de Whitney*. Já a existência de métricas pseudo-Riemannianas em M está condicionada à sua topologia:

Teorema 1.2.2. *Uma variedade diferenciável M admite uma métrica pseudo-Riemanniana de índice ν se e somente se existe uma distribuição suave¹ de posto ν definida em toda a M .*

Essencialmente, a métrica a ser definida tornará a distribuição dada completamente negativa. Particularizando para o caso Lorentziano, temos o

Corolário 1.2.3. *Seja M uma variedade diferenciável conexa. São equivalentes:*

- (i) M admite uma métrica Lorentziana;
(ii) Existe um campo de vetores sobre M que nunca se anula;

¹Uma distribuição \mathcal{D} de posto ν ao longo de M é uma escolha suave, para cada $p \in M$, de um subespaço ν -dimensional $\mathcal{D}_p \subseteq T_p M$. A escolha é suave no seguinte sentido: para todo $p \in M$ existem uma vizinhança aberta U de p e campos $\{X_1, \dots, X_\nu\}$ ao longo de U tais que \mathcal{D}_q é gerado por $\{X_{1q}, \dots, X_{\nu q}\}$, para todo $q \in U$.

(iii) Ou M é não-compacta, ou sua característica de Euler-Poincaré $\chi(M)$ é zero.

Para uma demonstração do Teorema 1.2.2 acima, veja a referência clássica [1], ou então [24] (onde são discutidas várias consequências). Para o Corolário 1.2.3 como enunciado acima, veja [22]. Vejamos alguns exemplos de métricas pseudo-Riemannianas:

Exemplo 1.2.4.

(1) Para cada $n \geq 1$ e $0 \leq \nu \leq n$, a métrica que associa à cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\nu^n$ o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$ em $\mathbb{T}_x(\mathbb{R}_\nu^n) \cong \mathbb{R}_\nu^n$ é pseudo-Riemanniana.

(2) Os conjuntos

$$\mathbb{S}_\nu^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_\nu = 1\} \quad \text{e} \quad \mathbb{H}_\nu^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\nu+1} = -1\}$$

munidos das métricas pseudo-Riemannianas induzidas de \mathbb{R}_ν^{n+1} e $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ (conforme (1) acima) são variedades pseudo-Riemannianas com índices iguais à ν . Em particular, \mathbb{S}_1^n é chamado o *espaço de de Sitter* e \mathbb{H}_1^n é chamado o *espaço de anti-de Sitter*.

(3) Sejam (B, g_B) e (F, g_F) duas variedades pseudo-Riemannianas, $f \in C^\infty(B)$ que nunca se anule, e $\pi: B \times F \rightarrow B$ e $\sigma: B \times F \rightarrow F$ as projeções. Então

$$g \doteq \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F$$

é uma métrica pseudo-Riemanniana em $B \times F$, com índice $\text{Ind}(g) = \text{Ind}(g_B) + \text{Ind}(g_F)$. Em outras palavras, se $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{T}_{(p,q)}(B \times F)$, então

$$g_{(p,q)}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (g_B)_p(d\pi_{(p,q)}(\mathbf{v}), d\pi_{(p,q)}(\mathbf{w})) + f(p)^2 (g_F)_q(d\sigma_{(p,q)}(\mathbf{v}), d\sigma_{(p,q)}(\mathbf{w})).$$

O par $B \times_f F = (B \times F, g)$ é chamado o *produto distorcido*² de B e F por f . A ideia desta construção é generalizar a ideia da métrica produto usual, distorcendo-a em cada *fibra* $p \times F \cong F$, de acordo com o ponto p na *base* B .

Definição 1.2.5. Seja M uma variedade diferenciável. Uma *conexão linear* em M é uma aplicação $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo

- (i) $\nabla_{X_1 + fX_2} Y = \nabla_{X_1} Y + f \nabla_{X_2} Y$
- (ii) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;
- (iii) $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$,

quaisquer que sejam $X, X_1, X_2, Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$.

Observação.

- Em geral, se $E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M , uma *conexão de Koszul* sobre E é uma aplicação $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ satisfazendo (i), (ii) e (iii) acima. Ou seja, uma conexão linear é uma conexão de Koszul sobre TM .
- É possível mostrar (veja [17]) que, para cada $p \in M$, o valor de $(\nabla_X Y)_p$ depende apenas do valor X_p e dos valores de Y em uma vizinhança de p . Em outras palavras, ∇ é *tensorial* na variável X , devido à $C^\infty(M)$ -linearidade nesta variável. Assim, fica bem-definido $\nabla_{X_p} Y \doteq (\nabla_X Y)_p$.

²Warped product.

Em princípio, métricas e conexões são conceitos independentes sobre M . A geometria adequada sobre M é descrita por uma certa conexão, que se relaciona com a métrica. Vamos motivar as duas condições que imporemos sobre tal conexão na discussão a seguir. Começamos recordando a

Definição 1.2.6 (Campos tensoriais). Seja M uma variedade diferenciável. Um *campo tensorial de tipo*³ (r, s) ao longo de M é uma aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear

$$T: \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow C^\infty(M).$$

O conjunto de tais campos tensoriais é denotado por $\mathfrak{T}_s^r(M)$.

Observação.

- Note que $\mathfrak{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$ e $\mathfrak{T}_0^1(M) \cong \mathfrak{X}(M)$. Convencionamos $\mathfrak{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$. Eventualmente chamaremos campos tensoriais apenas de “tensores”.
- A $C^\infty(M)$ multilinearidade de $T \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ garante que o valor de

$$(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s))(p)$$

depende apenas dos valores dos seus argumentos em p , qualquer que seja $p \in M$.

- De modo análogo à situação em espaços vetoriais, temos uma operação de produto tensorial $\otimes: \mathfrak{T}_s^r(M) \times \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s+s'}^{r+r'}(M)$. Por exemplo, se $A \in \mathfrak{T}_2^1(M)$ e $B \in \mathfrak{T}_1^1(M)$, então o produto $A \otimes B \in \mathfrak{T}_3^2(M)$ é definido por

$$(A \otimes B)(\omega^1, \omega^2, X_1, X_2, X_3) \doteq A(\omega^1, X_1, X_2)B(\omega^2, X_3).$$

- Eventualmente é conveniente lidar com campos tensoriais cujos argumentos estejam permutados, como por exemplo $A(\omega^1, X, \omega^2, X_2, X_3)$, entre outros.

Lema 1.2.7 (Contração). Seja M uma variedade diferenciável. Existe uma única aplicação $C^\infty(M)$ -linear, chamada contração, $\text{tr}_1^1: \mathfrak{T}_1^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$ tal que $\text{tr}_1^1(X \otimes \omega) = \omega(X)$, para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Para uma demonstração, veja [18]. Em geral, para um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, temos várias possibilidades de contração (tr_b^a), dependendo dos argumentos escolhidos.

Definição 1.2.8. Seja M uma variedade diferenciável. Uma *derivação tensorial* em M é uma coleção de aplicações \mathbb{R} -lineares $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}_s^r: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$ tais que

- $\mathcal{D}(A \otimes B) = \mathcal{D}A \otimes B + A \otimes \mathcal{D}B$;
- $\text{tr}_b^a(\mathcal{D}A) = \mathcal{D}(\text{tr}_b^a(A))$, para toda contração tr_b^a .

O próximo resultado, cuja demonstração também pode ser encontrada em [18], nos diz essencialmente tudo o que precisamos saber sobre derivações tensoriais:

Teorema 1.2.9. Sejam M uma variedade diferenciável e \mathcal{D} uma derivação tensorial em M . Para todo $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, vale a igualdade

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) &= \mathcal{D}A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\omega^1, \dots, \mathcal{D}\omega^i, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \sum_{i=1}^s A(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s), \end{aligned}$$

para quaisquer $\omega^1, \dots, \omega^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$.

³ r vezes contra-variante e s vezes covariante.

Ou seja, este último teorema nos diz que para conhecer uma derivação tensorial \mathcal{D} , basta saber como ela age em $C^\infty(M)$ e em $\mathfrak{X}(M)$. A ação em $\mathfrak{X}^*(M)$ também é conhecida, uma vez que $\mathcal{D}\omega(\mathbf{X}) = \mathcal{D}(\omega(\mathbf{X})) - \omega(\mathcal{D}\mathbf{X})$, quaisquer que sejam $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ e $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$

Com isto, se ∇ é uma conexão linear em M , pode-se definir uma derivação $\nabla_{\mathbf{X}}$, para cada $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$. Se $f \in C^\infty(M)$, colocamos $\nabla_{\mathbf{X}}f \doteq \mathbf{X}(f)$, e assim podemos escrever a:

Definição 1.2.10. Sejam M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão linear em M .

- (i) Dados $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ e $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, a *derivada covariante de A na direção de \mathbf{X}* é o tensor $\nabla_{\mathbf{X}}A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ definido pela expressão

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}(A(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)) &= \nabla_{\mathbf{X}}A(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) + \\ &+ \sum_{i=1}^r A(\omega^1, \dots, \nabla_{\mathbf{X}}\omega^i, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s) \\ &+ \sum_{i=1}^s A(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{X}_i, \dots, \mathbf{X}_s). \end{aligned}$$

- (ii) Se $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$, a *derivada covariante total de A* é o tensor $\nabla A \in \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$ definido por

$$\nabla A(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s; \mathbf{X}) \doteq \nabla_{\mathbf{X}}A(\omega^1, \dots, \omega^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s).$$

- (iii) Dizemos que um campo tensorial $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ é *paralelo* se $\nabla A = 0$.

Agora estamos em condições de apresentar a primeira condição que desejaremos que nossa conexão ∇ possua:

Definição 1.2.11. Sejam M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão linear em M .

- (i) A *torção* de ∇ é o campo tensorial $\tau^\nabla \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ definido por

$$\tau^\nabla(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}].$$

- (ii) O *hessiano covariante* de $f \in C^\infty(M)$ segundo ∇ é o tensor $\text{Hess}(f) \doteq \nabla(\nabla f) \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, dado por

$$\text{Hess}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) - \text{d}f(\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}).$$

Proposição 1.2.12. Sejam M uma variedade diferenciável e ∇ uma conexão linear em M . Então a torção de ∇ é identicamente nula se e somente se todos os hessianos covariantes segundo ∇ são simétricos.

Demonstração: Basta observar para quaisquer $f \in C^\infty(M)$ e $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se

$$\text{Hess}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{Hess}(f)(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + \tau^\nabla(\mathbf{X}, \mathbf{Y})(f).$$

□

Ou seja, a torção de uma conexão mede o quanto a “derivada segunda” de uma função suave deixa de ser simétrica. Entretanto, a torção de uma conexão ainda é um conceito independente de qualquer métrica pseudo-Riemanniana. Sendo assim, para motivar a segunda condição, voltamos a considerar variedades pseudo-Riemannianas.

Definição 1.2.13 (Isomorfismos musicais). Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana. Os *isomorfismos musicais* $\sharp: \mathfrak{X}^*(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ e $\flat: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^*(M)$ são definidos por $\omega(\mathbf{X}) = \langle \omega^\sharp, \mathbf{X} \rangle$ e $\mathbf{X}_\flat(\mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$.

Observação.

- Os isomorfismos musicais nos permitem “tocar uma sinfonia” com tensores, convertendo argumentos contravariantes em covariantes e vice-versa. Por exemplo, se $A \in \mathfrak{T}_3^2(M)$, podemos definir $\bar{A}: \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ via

$$\bar{A}(\omega, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \theta, \mathbf{Z}) = A(\omega, \mathbf{X}_b, \mathbf{Y}, \theta^\sharp, \mathbf{Z}).$$

Se $(U, (x^1, \dots, x^n)) \in \Sigma(M)$ é um sistema de coordenadas em M , a relação entre as componentes $A_{k\ell m}^{ij} \doteq A(dx^i, dx^j, \partial_k, \partial_\ell, \partial_m)$ e $A_{jk m}^{i\ell} \doteq \bar{A}(dx^i, \partial_j, \partial_k, dx^\ell, \partial_m)$ neste sistema é dada por

$$A_{jk m}^{i\ell} = \sum_{a,b=1}^n g_{aj} g^{bl} A_{kbm}^{ia},$$

onde $g_{ij} \doteq \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ e $(g^{ij})_{i,j=1}^n$ denota a matriz inversa de $(g_{ij})_{i,j=1}^n$. Ou seja, a métrica é usada para “subir ou descer meio tom” nos índices das componentes dos tensores, justificando a nomenclatura de isomorfismos “musicais” dada.

- Usando o processo descrito acima, podemos agora realizar contrações entre dois índices contravariantes ($\text{tr}^{a,b}$) ou dois índices covariantes ($\text{tr}_{a,b}$). Basta descrever o processo para tensores de tipo $(0, 2)$ (sendo o caso $(2, 0)$ análogo): dado $T \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, definimos um novo $T^\sharp \in \mathfrak{T}_1^1(M)$ por $T^\sharp(\omega, \mathbf{X}) \doteq T(\omega^\sharp, \mathbf{X})$, e colocamos $\text{tr}_{1,2}(T) \doteq \text{tr}_1^1(T^\sharp)$. Relativamente a um sistema de coordenadas, temos $\sum_{i=1}^n T_i^i = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} T_{ij}$. Em particular, o traço visto no Teorema 1.1.29 (p. 19) nada mais é do que $\text{tr}_{1,2}$, a menos do contradomínio.
- O gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$ é definido então como $\text{grad } f \doteq (df)^\sharp$.
- Já utilizamos a aplicação bemol \flat a nível de espaços vetoriais com o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$, na demonstração da Proposição 1.1.5 (p. 9).

A própria métrica pseudo-Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um elemento de $\mathfrak{T}_2^0(M)$ e, portanto, faz sentido indagarmos se a métrica é um tensor paralelo segundo a conexão ∇ . Explicitamente, vemos que

$$\nabla(\langle \cdot, \cdot \rangle)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} \rangle,$$

quaisquer que sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$. Qualitativamente, o quanto a métrica deixa de ser paralela é medido pelo quanto a conexão deixa de ser compatível com os isomorfismos musicais, no sentido da:

Proposição 1.2.14. *Sejam $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e ∇ uma conexão linear em M . Então ∇ paraleliza $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se e somente se $(\nabla_{\mathbf{X}} \omega)^\sharp = \nabla_{\mathbf{X}} \omega^\sharp$ e $(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})^\flat = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}^\flat$, quaisquer que sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$.*

Demonstração: Suponha que ∇ paraleliza $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

- ∇ é compatível com \sharp : temos

$$\begin{aligned} \langle (\nabla_{\mathbf{X}} \omega)^\sharp, \mathbf{Y} \rangle &= (\nabla_{\mathbf{X}} \omega)(\mathbf{Y}) \\ &= \mathbf{X}(\omega(\mathbf{Y})) - \omega(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) \\ &= \mathbf{X} \langle \omega^\sharp, \mathbf{Y} \rangle - \langle \omega^\sharp, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \rangle \\ &\stackrel{(1)}{=} \langle \nabla_{\mathbf{X}} \omega^\sharp, \mathbf{Y} \rangle + \langle \omega^\sharp, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \rangle - \langle \omega^\sharp, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\mathbf{X}} \omega^\sharp, \mathbf{Y} \rangle, \end{aligned}$$

onde em (1) usamos que ∇ paraleliza $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sendo \mathbf{Y} arbitrário e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não-degenerada, segue que $(\nabla_{\mathbf{X}} \omega)^\sharp = \nabla_{\mathbf{X}} \omega^\sharp$.

- ∇ é compatível com \flat : sendo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ arbitrário, temos

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y)_b(Z) &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} X \langle Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ &= X(Y_b(Z)) - Y_b(\nabla_X Z) \\ &= (\nabla_X Y_b)(Z), \end{aligned}$$

onde em (2) novamente usamos que ∇ paraleliza $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Disto segue que $(\nabla_X Y)_b = \nabla_X Y_b$, como desejado.

Agora suponha que ∇ é compatível com os isomorfismos musicais. Temos que

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= X(Y_b(Z)) \\ &= (\nabla_X Y_b)(Z) + Y_b(\nabla_X Z) \\ &\stackrel{(3)}{=} (\nabla_X Y)_b(Z) + Y_b(\nabla_X Z) \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \end{aligned}$$

onde em (3) usamos que ∇ é compatível com \flat . □

Toda a discussão acima culmina no:

Teorema 1.2.15. *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana. Existe uma única conexão linear em M que paraleliza $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e possui torção nula. Tal conexão é dita a conexão de Levi-Civita de $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

A demonstração deste teorema é a mesma apresentada pela literatura no caso Riemanniano (utilizando a fórmula de Koszul) e pode ser consultada, por exemplo, em [17].

Observação. Deste ponto em diante, somente trabalharemos com a conexão de Levi-Civita de qualquer variedade.

É conveniente expressarmos tal conexão em coordenadas:

Proposição 1.2.16 (Segunda identidade de Christoffel). *Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana. Se $(U, (x^1, \dots, x^n)) \in \Sigma(M)$ é uma carta de M , e*

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

então

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^n \frac{1}{2} g^{kr} \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} \right),$$

onde $(g_{ij})_{i,j=1}^n$ é a matriz dos coeficientes de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na carta escolhida e $(g^{ij})_{i,j=1}^n$ é a sua inversa. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados os Símbolos de Christoffel.

Observação. Note que os Símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores. Para $n = 2$, adotando a notação clássica $E = \langle \partial_u, \partial_u \rangle$, $F = \langle \partial_u, \partial_v \rangle$ e $G = \langle \partial_v, \partial_v \rangle$, a segunda identidade de Christoffel se simplifica muito principalmente quando $F = 0$. Neste caso a expressão dada para os Γ_{ij}^k se reduz à

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right).$$

Em particular, vemos que:

- Se $i \neq j$ apenas, como $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e $g_{ij} = 0$, temos

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^j},$$

ou seja,

$$\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u = \frac{E_v}{2E} \quad \text{e} \quad \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v = \frac{G_u}{2G}.$$

- Se $i = j \neq k$, temos $g_{ik} = g_{jk} = 0$ e daí

$$\Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2} g^{kk} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^k},$$

ou, equivalentemente,

$$\Gamma_{uu}^v = -\frac{E_v}{2G} \quad \text{e} \quad \Gamma_{vv}^u = -\frac{G_u}{2E}.$$

- Se $i = j = k$, temos:

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^i},$$

ou,

$$\Gamma_{uu}^u = \frac{E_u}{2E} \quad \text{e} \quad \Gamma_{vv}^v = \frac{G_v}{2G}.$$

Para uma demonstração, veja [17]. Com a conexão de Levi-Civita, podemos introduzir uma noção adequada de curvatura, que mede o quanto derivadas (covariantes) segundas deixam de comutar:

Definição 1.2.17 (Tensor de curvatura). Seja $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana. A *curvatura de Riemann* de M é a aplicação $C^\infty(M)$ -multilinear $R: \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z \doteq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Observação.

- Em geral, se ∇ é uma conexão de Koszul em um fibrado vetorial $\pi: E \rightarrow M$, a curvatura de ∇ é a aplicação $R^\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ definida pela expressão acima. Neste contexto, a curvatura de Riemann nada mais é do que a curvatura da conexão de Levi-Civita.
- Definindo $\nabla_{X, Y}^2 Z \doteq \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z$, a expressão $R(X, Y)Z = \nabla_{X, Y}^2 Z - \nabla_{Y, X}^2 Z$ nos diz que R mede o quanto estas derivadas covariantes “segundas” deixam de comutar.
- Pela $C^\infty(M)$ -multilinearidade de R , podemos calcular R em vetores tangentes ao invés de campos, obtendo aplicações multilineares R_p em cada espaço tangente $T_p M$.
- Definindo $R: \mathfrak{X}(M)^4 \rightarrow C^\infty(M)$ por $R(X, Y, Z, W) \doteq \langle R(X, Y)Z, W \rangle$, obtemos um elemento de $\mathfrak{T}_4^0(M)$ satisfazendo as seguintes simetrias:

$$(i) \quad R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z);$$

$$(ii) \quad R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y);$$

$$(iii) \quad R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0,$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. A expressão em (iii) é conhecida como *primeira identidade de Bianchi*. Para uma demonstração, veja [17].

A partir da curvatura de Riemann, temos outras noções relevantes de curvatura:

Definição 1.2.18. Seja $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana.

(i) A *curvatura seccional* de um 2-plano não-degenerado $\Pi \subseteq T_p M$ é definida por

$$K(\Pi) \equiv K(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \doteq \frac{R(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{v})}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2},$$

onde $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma base de Π . Tal expressão não depende da escolha da base de Π . Quando $n = 2$, K é chamada a *curvatura Gaussiana* de M .

(ii) A *curvatura de Ricci* de M é a aplicação $\text{Ric}: \mathfrak{X}(M)^2 \rightarrow C^\infty(M)$ definida por

$$\text{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \doteq \text{tr}(\mathbf{Z} \mapsto R(\mathbf{Z}, \mathbf{X})\mathbf{Y}).$$

Note que $\text{Ric} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ é um tensor simétrico.

(iii) A *curvatura escalar* de M é a função $S \in C^\infty(M)$ definida por $S \doteq \text{tr}_{1,2} \text{Ric} = \text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \text{Ric}$.

Exemplo 1.2.19.

(1) A conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}_ν^n é dada por $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n X(Y^i) \partial_i$, onde $\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i$, e $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ denotam os campos canônicos ($\partial_i|_x \doteq e_i$, para todo $x \in \mathbb{R}_\nu^n$). Além disto, se $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$, $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^n Y^j \partial_j$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}_\nu^n)$, temos que

$$\text{Hess}(f)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{i,j=1}^n X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Por fim, é fácil ver que $R \equiv 0$, de modo que todas as curvaturas de \mathbb{R}_ν^n são nulas.

(2) Em geral, se uma variedade pseudo-Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ possui curvatura seccional constante e igual a K_0 , pode-se mostrar (lançando mão de uma certa polarização) que

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = K_0(\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{X} - \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}).$$

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [17]. Em particular, segue disto que

$$\text{Ric}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (n-1)K_0 \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \quad \text{e} \quad S = n(n-1)K_0.$$

Isto em particular se aplica para as *formas espaciais pseudo-Riemannianas*

$$\mathbb{M}_\nu^n(c) \doteq \begin{cases} \mathbb{R}_\nu^n, & \text{se } c = 0, \\ \mathbb{S}_\nu^n, & \text{se } c = 1, \\ \mathbb{H}_\nu^n, & \text{se } c = -1. \end{cases}$$

A noção correta de equivalência entre variedades pseudo-Riemannianas é a de *isometria*:

Definição 1.2.20. Sejam (M_1, g_1) e (M_2, g_2) variedades pseudo-Riemannianas. Um difeomorfismo (local) $F: M_1 \rightarrow M_2$ é uma *isometria* (local) se

$$(g_1)_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (g_2)_{F(p)}(dF_p(\mathbf{v}), dF_p(\mathbf{w})),$$

quaisquer que sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p M_1$.

Observação. Rigorosamente, deve ser feito um comentário sobre a nomenclatura de “formas espaciais” que adotamos no item (2) do Exemplo 1.2.19. Uma forma espacial pseudo-Riemanniana

é uma variedade pseudo-Riemanniana conexa, geodesicamente completa e com curvatura seccional constante. Mostra-se (vide por exemplo [18]) que duas formas espaciais *simplesmente conexas* são isométricas se e somente se possuem mesma dimensão, índice e curvatura. Entretanto, os espaços S_{n-1}^n e \mathbb{H}_1^n são anti-isométricos e não são simplesmente conexos. Isto justifica o uso frequente na literatura dos seus recobrimentos universais. Em geral, toda forma espacial $(\bar{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é o quociente de uma forma espacial simplesmente conexa por um grupo discreto de isometrias (a saber, o seu grupo fundamental $\pi_1(\bar{M})$).

A adequação desta definição de isometria fica evidenciada pelo seguinte resultado:

Teorema 1.2.21. *Sejam (M, g) e (\bar{M}, \bar{g}) variedades pseudo-Riemannianas, e $F: M \rightarrow \bar{M}$ uma isometria. Denote suas conexões de Levi-Civita por ∇ e $\bar{\nabla}$, e suas curvaturas de Riemann por R e \bar{R} . Então, dados $p \in M$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(\bar{M})$, valem:*

$$(i) \quad dF(\nabla_X Y) = \left(\bar{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) \right) \circ F;$$

$$(ii) \quad \text{Hess}(f \circ F)(X, Y) = \text{Hess}(f)(dF(X), dF(Y)) \circ F;$$

$$(iii) \quad \Delta(f \circ F) = (\Delta f) \circ F, \text{ onde } \Delta f \doteq \text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \text{Hess}(f) \text{ é o Laplaceano de } f;$$

$$(iv) \quad dF(R(X, Y)Z) = (\bar{R}(dF(X), dF(Y))dF(Z)) \circ F.$$

Demonstração: Vejamos, por exemplo, a demonstração de (ii) utilizando (i). Temos:

$$\begin{aligned} \text{Hess}(f \circ F)(X, Y) &= X(Y(f \circ F)) - (\nabla_X Y)(f \circ F) \\ &= X(dF(Y)(f) \circ F) - dF(\nabla_X Y)(f) \\ &= dF(X)(dF(Y)(f)) \circ F - ((\bar{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)) \circ F)(f) \\ &= \text{Hess}(f)(dF(X), dF(Y)) \circ F, \end{aligned}$$

como desejado. □

Observação.

- O item (i) segue, por exemplo, da fórmula de Koszul. Assim, o item (iii) é um corolário imediato de (ii).
- O operador Δ é chamado o *operador de Laplace-Beltrami*. O Exemplo 1.2.19 (p. 27) nos diz que se $f \in C^\infty(\mathbb{R}_\nu^n)$, então

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n-\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \sum_{i=n-\nu+1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Quando $\nu = 1$, Δ é usualmente denotado por \square (o d'Alembertiano, operador de onda). Em geral, funções f satisfazendo $\Delta f = 0$ são ditas *harmônicas*. Os operadores Hess e Δ são naturalmente estendidos para funções assumindo valores em \mathbb{R}^k , agindo componente a componente.

- De (iv) segue também que isometrias preservam a curvatura seccional, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar.

1.2.2 Teoria de subvariedades *in the large*

Na Geometria Diferencial Clássica de curvas e superfícies, estudamos como a geometria de uma superfície se relaciona com a geometria do ambiente \mathbb{R}^3 onde esta se localiza. Vejamos como as geometrias de duas variedades pseudo-Riemannianas se relacionam, quando uma está “dentro” da outra.

Definição 1.2.22. Sejam (M, g) e (\bar{M}, \bar{g}) duas variedades pseudo-Riemannianas. Uma aplicação suave $F: M \rightarrow \bar{M}$ é uma *imersão isométrica* se dF_p é injetora para todo $p \in M$ e

$$g_p(v, w) = \bar{g}_{F(p)}(dF_p(v), dF_p(w)),$$

quaisquer que sejam $v, w \in T_p M$.

Nesta situação, ao invés de carregar a imersão, seguiremos a tradição em Geometria, identificando M com $F(M)$ e F com a inclusão. Deste modo, podemos utilizar a notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tanto para a métrica do ambiente \bar{M} como para a métrica induzida em M .

Diremos que M é de *tipo espaço* se a métrica induzida em M for Riemanniana e, se \bar{M} for Lorentziana, que M é de tipo tempo ou luz conforme a métrica induzida seja também Lorentziana ou degenerada, respectivamente.

Sendo M não-degenerada (i.e., com métrica induzida não-degenerada), para todo $p \in M$ podemos ver $T_p M$ como um subespaço de $T_p \bar{M}$, obtendo a decomposição $T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$. Globalizando, temos a decomposição em soma de Whitney $T\bar{M}|_M = TM \oplus TM^\perp$, onde TM^\perp é chamado o *fibrado normal* de M , e cada $(T_p M)^\perp$ é o *espaço normal* à M em p . Denotamos as *projeções tangente e normal* associadas por \top e \perp , como esperado.

Seguindo [18], denotamos por $\bar{\mathfrak{X}}(M)$ e $\mathfrak{X}^\perp(M)$ os $C^\infty(M)$ -módulos dos campos de vetores ao longo de M não necessariamente tangentes à M , e normais à M , respectivamente.

Observação. Além do mencionado acima, denotaremos por $\bar{\nabla}$ e \bar{R} a conexão de Levi-Civita e a curvatura de Riemann de \bar{M} , reservando a notação sem barras para os objetos geométricos associados à M . Note também que $\mathfrak{X}^\perp(M) = \Gamma(TM^\perp)$, em linguagem de fibrados.

O primeiro passo natural é relacionar a conexão e a curvatura de M com a do ambiente \bar{M} . Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar extensões locais \bar{X} e \bar{Y} para alguma vizinhança de M , e escrever

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top + (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp.$$

Seguindo esta notação, temos o:

Teorema 1.2.23. Sejam $(\bar{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M^n \subseteq \bar{M}^{n+m}$ uma subvariedade não-degenerada de \bar{M} .

(i) Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale que $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$, quaisquer que sejam as extensões locais de X e Y escolhidas.

(ii) A aplicação $\text{II}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$ definida por $\text{II}(X, Y) \doteq (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp$ está bem definida (ou seja, não depende das escolhas de extensões de X e Y), é $C^\infty(M)$ -bilinear e simétrica. Tal aplicação II é chamada a Segunda Forma Fundamental de M em \bar{M} .

Para uma demonstração, consulte [17]. Em vista deste resultado, abusamos da notação e escrevemos simplesmente

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \text{II}(X, Y),$$

expressão tal conhecida como a *fórmula de Gauss*.

Com isto, registramos a relação entre R e \bar{R} na:

Proposição 1.2.24 (Gauss). Sejam $(\bar{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M^n \subseteq \bar{M}^{n+m}$ uma subvariedade não-degenerada de \bar{M} . Sendo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, vale que:

$$R(X, Y, Z, W) = \bar{R}(X, Y, Z, W) + \langle \text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z) \rangle - \langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle.$$

A demonstração consiste em um cálculo direto, que pode ser consultado em [18].

Corolário 1.2.25. *Sejam $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e M^n uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} . Sendo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, vale que*

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + \frac{\langle \Pi(X, X), \Pi(Y, Y) \rangle - \langle \Pi(X, Y), \Pi(X, Y) \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2},$$

para todo ponto em que $\text{span}(X_p, Y_p)$ seja não-degenerado. Chamaremos a quantidade

$$K_{\text{ext}}(X, Y) \doteq K(X, Y) - \overline{K}(X, Y)$$

de curvatura (seccional) extrínseca.

Junto com a Segunda Forma Fundamental, temos mais dois conceitos de extrema importância, que relacionam as geometrias de M e \overline{M} :

Definição 1.2.26. *Sejam $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e M^n uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} .*

(i) O vetor curvatura média de M é o campo $H \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ definido por

$$H \doteq \frac{1}{n} \text{tr} \langle \cdot, \cdot \rangle \Pi.$$

(ii) Seja $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. O operador de Weingarten associado à ξ é o endomorfismo $C^\infty(M)$ -linear $A_\xi: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ caracterizado pela relação

$$\langle A_\xi(X), Y \rangle = \langle \Pi(X, Y), \xi \rangle,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação. A existência de A_ξ está garantida pelo fato da métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ser não-degenerada. Explicitamente, temos que

$$\langle \Pi(X, Y), \xi \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \xi \rangle = \langle \overline{\nabla}_X Y, \xi \rangle \stackrel{(*)}{=} \langle Y, -\overline{\nabla}_X \xi \rangle = \left\langle -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top, Y \right\rangle,$$

donde segue que $A_\xi(X) = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top$, onde em $(*)$ usamos que $\langle Y, \xi \rangle = 0$. Além disto, como Π é simétrica, cada A_ξ é auto-adjunto. Segue disto que se M é Riemanniana, cada A_ξ é diagonalizável. Na verdade, esta conclusão pode ser melhorada sob hipóteses adequadas, usando a seguinte versão do Teorema Espectral Real: se $T: \mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ é auto-adjunto em relação à $\langle \cdot, \cdot \rangle_v$, $n \geq 3$, e $\langle T v, v \rangle_v \neq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}_v^n$ de tipo luz, então T é diagonalizável em base ortonormal. Para uma demonstração⁴, veja [5].

Os seguintes conceitos serão importantes para o capítulo seguinte:

Definição 1.2.27. *Sejam $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana, M uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} , e $p \in M$. Diremos que:*

- (i) p é um ponto plano (flat point) se $\Pi(v, w) = \mathbf{0}$, para todos $v, w \in T_p M$;
- (ii) M é totalmente geodésica se $\Pi = \mathbf{0}$;
- (iii) p é um ponto umbílico se existe $\xi(p) \in T_p M^\perp$ tal que $\Pi(v, w) = \langle v, w \rangle \xi(p)$, para todos $v, w \in T_p M$;

⁴O argumento dado, devido à Milnor, é surpreendente: a hipótese $n \geq 3$ garante que $\mathbb{R}_v^n \setminus \{0\}$ é simplesmente conexo, facilitando o uso de ferramentas de topologia, homotopias e integração.

(iv) M é *totalmente umbílica* se todos os seus pontos são umbílicos.

(v) M é *pseudo-umbílica* se existe $\rho \in C^\infty(M)$ tal que $\langle \Pi(X, Y), H \rangle = \rho \langle X, Y \rangle$, para todos os campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação. Na definição acima, é fácil ver que necessariamente teremos $\xi(p) = H(p)$ em (iii), e $\rho = \langle H, H \rangle$ em (v). Ainda, M ser totalmente umbílica é equivalente à cada operador de Weingarten em p ser um múltiplo da identidade, ou seja, para todo $\xi(p) \in T_p M^\perp$ existe $\lambda_{\xi(p)} \in \mathbb{R}$ tal que $A_{\xi(p)} = \lambda_{\xi(p)} \text{Id}_{T_p M}$. Finalmente, note que

$$\text{totalmente geodésica} \implies \text{totalmente umbílica} \implies \text{pseudo-umbílica}.$$

Exemplo 1.2.28 (Hiperquádricas).

(1) Para S_ν^n , temos que um campo normal é $N: S_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ dado por $N(x) \doteq x$. Assim, dado um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos $A_N(X) = -(\nabla_X N)^\top = (-dN(X))^\top = (-\text{Id}(X))^\top = -X$, donde o Lema 1.1.7 (p. 10) nos dá

$$\Pi(X, Y) = \langle \Pi(X, Y), N \rangle_\nu N = \langle A_N(X), Y \rangle_\nu N = -\langle X, Y \rangle_\nu N.$$

Deste modo, temos que S_ν^n é totalmente umbílica em \mathbb{R}_ν^{n+1} e o Corolário 1.2.25 (p. 30) nos dá que a curvatura seccional de S_ν^n é constante e dada por $K = 1$. Além disto, o vetor curvatura média de S_ν^n é dado simplesmente por

$$H = \frac{1}{n} \text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu} (-\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu N) = -\frac{1}{n} (\text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu} \langle \cdot, \cdot \rangle_\nu) N = -N.$$

(2) De modo análogo, considerando \mathbb{H}_ν^n , temos que um campo normal é $N: \mathbb{H}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ dado por $N(x) \doteq x$, donde $A_N(X) = -X$, e $\Pi(X, Y) = \langle X, Y \rangle N$. Desta vez, também temos que \mathbb{H}_ν^n é totalmente umbílico em \mathbb{R}_ν^{n+1} , e o Corolário 1.2.25 nos diz que a curvatura seccional de \mathbb{H}_ν^n também é constante e dada por $K = -1$, e o vetor curvatura média de \mathbb{H}_ν^n é simplesmente $H = N$.

A relação entre a curvatura média e os operadores de Weingarten fica resumida na:

Proposição 1.2.29. *Sejam $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e M^n uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} . Suponha que $\mathcal{F} = (E_1, \dots, E_n, N_{n+1}, \dots, N_{n+m})$ é um referencial local adaptado à M (ou seja, os E_i são tangentes à M , e os N_j são normais à M , todos definidos em algum aberto de M). Então:*

(i) se $(N_{n+1}, \dots, N_{n+m})$ são ortonormais, o vetor curvatura média de M se expressa como

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i \text{tr}(A_{N_i}) N_i,$$

onde $\epsilon_i \doteq \epsilon_{N_i}$ abreviam os indicadores dos campos N_i .

(ii) Escrevendo

$$A_{N_k}(E_j) = \sum_{i=1}^n h_{kj}^i E_i \quad e \quad \Pi(E_i, E_j) = \sum_{k=n+1}^{n+m} h_{ij}^k N_k, \quad \begin{array}{l} 1 \leq i, j \leq n, \\ n+1 \leq k \leq n+m, \end{array}$$

tem-se que

$$h_{kj}^i = \sum_{\ell=1}^n \sum_{r=n+1}^{n+m} h_{\ell j}^r g_{kr} g^{i\ell},$$

onde $(g_{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ é a matriz de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no referencial \mathcal{F} e $(g^{ij})_{i,j=1}^{n+m}$ a sua inversa.

Demonstração:

(i) Podemos supor que (E_1, \dots, E_n) também são ortonormais, e usar expansão ortonormal:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i \langle H, N_i \rangle N_i = \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i \left\langle \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j \Pi(E_j, E_j), N_i \right\rangle N_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i \sum_{j=1}^n \epsilon_j \langle A_{N_i}(E_j), E_j \rangle N_i = \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{n+m} \epsilon_i \operatorname{tr}(A_{N_i}) N_i, \end{aligned}$$

como desejado.

(ii) Partimos da relação $\langle A_{N_k}(E_j), E_i \rangle = \langle \Pi(E_i, E_j), N_k \rangle$, que se escreve como

$$\sum_{\ell=1}^n h_k^\ell g_{\ell i} = \sum_{r=n+1}^{n+m} h_{ij}^r g_{kr}.$$

Atacando ambos os lados com $\sum_{i=1}^n g^{ip}$ segue que

$$h_k^p = \sum_{i=1}^n \sum_{r=n+1}^{n+m} h_{ij}^r g_{kr} g^{ip}.$$

Renomeando (nesta ordem) $i \rightarrow \ell$ e $p \rightarrow i$ obtemos a conclusão desejada, como no enunciado. □

Observação. O item (ii) do resultado acima nos diz que tanto os operadores de Weingarten como a Segunda Forma Fundamental na realidade são diferentes facetas do mesmo objeto, identificados pela métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Para obter mais relações entre as geometrias de M e \overline{M} , utilizamos uma segunda conexão:

Definição 1.2.30 (Conexão normal). Sejam $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e M^n uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} . A *conexão normal* de M é $\nabla^\perp: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^\perp(M) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(M)$, definida por $\nabla_X^\perp \xi \doteq (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp$.

Observação.

- Temos que ∇^\perp de fato é uma conexão de Koszul em TM^\perp que, ainda por cima, paraleliza a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzida nos espaços normais à M : $X \langle \xi, \eta \rangle = \langle \nabla_X^\perp \xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla_X^\perp \eta \rangle$, quaisquer que sejam $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. Fica também definida a *curvatura normal* de M , como a curvatura R^\perp da conexão ∇^\perp , com expressão análoga a da Definição 1.2.17 (p. 26):

$$R^\perp(X, Y)\xi \doteq \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

- Em particular, note que vale a decomposição $\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi(X) + \nabla_X^\perp \xi$ (chamada *fórmula de Weingarten*).

A conexão normal é o ingrediente necessário restante para caracterizar subvariedades a menos de congruências do ambiente. Por exemplo, temos o:

Teorema 1.2.31. *Sejam $M^n, M'^n \subseteq \mathbb{R}_v^{n+m}$ duas subvariedades não-degeneradas. Então M e M' são congruentes se e somente se existem parametrizações de M e M' com mesmo domínio tais que os coeficientes das métricas induzidas, Segundas Formas Fundamentais e conexões normais coincidam.*

Uma discussão sobre este resultado pode ser encontrada em [11]. Prosseguindo, temos um análogo da Proposição 1.2.24 (p. 29), cuja demonstração pode ser consultada em [17]:

Proposição 1.2.32 (Ricci). *Sejam $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M^n \subseteq \overline{M}^{n+m}$ uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} . Sendo $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, vale que:*

$$\langle R^\perp(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \overline{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}) + \langle [A_{\boldsymbol{\zeta}}, A_{\boldsymbol{\eta}}](\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle,$$

onde $[A_{\boldsymbol{\zeta}}, A_{\boldsymbol{\eta}}] \doteq A_{\boldsymbol{\zeta}} \circ A_{\boldsymbol{\eta}} - A_{\boldsymbol{\eta}} \circ A_{\boldsymbol{\zeta}}$ denota o comutador de operadores lineares.

Observação. Se o ambiente \overline{M} possui curvatura seccional constante, utilizando a fórmula vista no item (2) do Exemplo 1.2.19 (p. 27), vemos que $\overline{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ e assim a equação de Ricci reduz-se à $\langle R^\perp(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle [A_{\boldsymbol{\zeta}}, A_{\boldsymbol{\eta}}](\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle$. Concluimos que o fibrado normal de M é plano (ou seja, $R^\perp = 0$) se e somente se $[A_{\boldsymbol{\zeta}}, A_{\boldsymbol{\eta}}] = 0$, quaisquer que sejam $\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta} \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. Quando a métrica induzida em M é Riemanniana, isto é equivalente à todos os operadores de Weingarten serem simultaneamente diagonalizáveis.

A filosofia por trás das equações de Gauss e Ricci consiste em analisar a expressão $\overline{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \cdot, \cdot)$ quando as últimas duas entradas são ocupadas por dois vetores tangentes e dois vetores normais, respectivamente. O caso misto é coberto pela equação de Codazzi-Mainardi:

Proposição 1.2.33 (Codazzi-Mainardi). *Sejam $(\overline{M}^{n+m}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M^n \subseteq \overline{M}^{n+m}$ uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} . Sendo $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\boldsymbol{\zeta} \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, vale que:*

$$\overline{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\zeta}) = \langle \overline{\nabla}\Pi(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}; \mathbf{X}) - \overline{\nabla}\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Z}; \mathbf{Y}), \boldsymbol{\zeta} \rangle,$$

onde a derivada covariante total de Π é definida adaptando a Definição 1.2.10 (p. 23):

$$\overline{\nabla}\Pi(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}; \mathbf{X}) \equiv (\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\Pi)(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \doteq \nabla_{\mathbf{X}}^\perp\Pi(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \Pi(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \Pi(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}).$$

Observação.

- A derivada covariante de Π definida acima é, no sentido estrito, a derivada covariante de Π relativa à conexão de Van der Waerden-Bortolotti $\nabla \oplus \nabla^\perp$ definida na soma de Whitney $\overline{TM}|_M = TM \oplus TM^\perp$.
- A equação de Codazzi-Mainardi também pode ser escrita como

$$(\overline{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z})^\perp = \overline{\nabla}\Pi(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}; \mathbf{X}) - \overline{\nabla}\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Z}; \mathbf{Y}).$$

Neste ponto, convém mencionar que para ambientes de curvatura seccional constante, as equações de Gauss, Ricci e Codazzi-Mainardi são suficientes para garantir a existência de uma certa imersão isométrica, com unicidade a menos de rigidez, como no enunciado do Teorema 1.2.31 acima. Para mais detalhes sobre o Teorema Fundamental das Imersões Isométricas, veja [10].

Concluiremos as preliminares analisando o que acontece quando temos três variedades encadeadas:

Proposição 1.2.34. *Sejam $(\overline{\overline{M}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana, e $M \subseteq \overline{M} \subseteq \overline{\overline{M}}$ subvariedades não-degeneradas. Denotando por $\overline{\overline{\nabla}}$ a conexão de Levi-Civita de $\overline{\overline{M}}$, Π a Segunda Forma Fundamental de M em \overline{M} e $\overline{\overline{\Pi}}$ a Segunda Forma Fundamental de \overline{M} em $\overline{\overline{M}}$, valem:*

- $\overline{\overline{\nabla}}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \overline{\overline{\Pi}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, quaisquer que sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$.
- $\overline{\overline{\nabla}}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\zeta} = -A_{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{X}}^\perp\boldsymbol{\zeta} + \overline{\overline{\Pi}}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\zeta})$, quaisquer que sejam $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ e $\boldsymbol{\zeta} \in \mathfrak{X}^\perp(M) \cap \mathfrak{X}(\overline{M})$, onde $A_{\boldsymbol{\zeta}}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é o operador de Weingarten em M derivado de $\boldsymbol{\zeta}$.

(iii) $A_{\xi}(\mathbf{X}) = -(\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\xi)^{\top_M}$, onde \top_M denota a projeção em TM .

Demonstração:

(i) Basta aplicar a fórmula de Gauss vista no Teorema 1.2.23 (p. 29) duas vezes:

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \overline{\Pi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \overline{\Pi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

(ii) Utilizamos a fórmula de Gauss juntamente com a fórmula de Weingarten (vista logo após a Definição 1.2.30, p. 32):

$$\overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\xi = \overline{\nabla}_{\mathbf{X}}\xi + \overline{\Pi}(\mathbf{X}, \xi) = -A_{\xi}(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{X}}^{\perp}\xi + \overline{\Pi}(\mathbf{X}, \xi).$$

(iii) Como $\nabla_{\mathbf{X}}^{\perp}\xi$ é normal à M e, à fortiori, $\overline{\Pi}(\mathbf{X}, \xi)$ também, basta aplicar \top_M na expressão do item anterior.

□

De posse deste resultado, o Exemplo 1.2.28 (p. 31) nos permite aplicar a proposição acima na situação frequente em que M é uma subvariedade de S_v^n ou \mathbb{H}_v^n .

Capítulo 2

Aprisionamento versus isotropia

De posse dos pré-requisitos vistos no capítulo anterior, estamos prontos para apresentar as definições mais importantes deste trabalho. Na Seção 2.1 apresentamos diversos exemplos de subvariedades marginalmente aprisionadas em formas espaciais, com o objetivo de levantar perguntas a serem respondidas no restante do trabalho. Já na Seção 2.2 introduzimos os chamados Referenciais de Penrose (*null frames*) para subvariedades de codimensão 2, que são uma ferramenta poderosa para obter diversos resultados. Como exemplo de aplicação, seguimos Anciaux em [49] para mostrar que toda subvariedade de codimensão 2 com Segunda Forma Fundamental de tipo luz em $\mathbb{M}_V^{n+2}(c)$ está contida em um hiperplano de tipo luz.

Na Seção 2.3, seguindo [46], introduzimos a noção de λ -isotropia, e estudamos as relações disto com umbilidade e pseudo-umbilicidade de superfícies em vários ambientes. Concluímos o capítulo registrando alguns resultados de rigidez para subvariedades 0-isotrópicas nas formas espaciais pseudo-Riemannianas $\mathbb{M}_V^{n+2}(c)$.

2.1 Definição e exemplos

Agora, finalmente temos a maquinaria básica necessária para apresentar a definição mais importante deste trabalho:

Definição 2.1.1. Sejam $(\bar{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana, $M \subseteq \bar{M}$ uma subvariedade não-degenerada de \bar{M} , e H o seu vetor curvatura média. Dizemos que M é:

- (i) *marginalmente aprisionada em \bar{M}* se H é sempre de tipo luz;
- (ii) *crítica* se $H = 0$;
- (iii) *w-marginalmente aprisionada*¹ em \bar{M} se $\langle H, H \rangle = 0$.

Observação. O índice da métrica de \bar{M} restrita aos espaços normais à M deve ser não-nulo e estritamente menor do que a codimensão de M em \bar{M} para que M possa ser marginalmente aprisionada em \bar{M} . Em particular, se a métrica de \bar{M} é Lorentziana e M é marginalmente aprisionada em \bar{M} , então M necessariamente é de tipo espaço e possui codimensão maior ou igual a 2 em \bar{M} .

Apresentaremos a seguir alguns exemplos de subvariedades marginalmente aprisionadas em diversos ambientes, para nos acostumarmos com a geometria destes objetos:

¹Adotamos tal terminologia inspirados por um dos termos adotados na literatura em inglês, “weakly marginally trapped”. Isto também tem a finalidade de evitar traduções longas e desagradáveis como “subvariedades fracamente marginalmente aprisionadas” ou “subvariedades parcialmente marginalmente aprisionadas”.

Exemplo 2.1.2. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $\tau \in C^\infty(\Omega)$, e $x: \Omega \rightarrow \mathbb{L}^{n+2} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{L}^2$ dada por

$$x(\mathbf{u}) \doteq (\mathbf{u}, \tau(\mathbf{u}), \tau(\mathbf{u})).$$

Observe que x e $Dx(\mathbf{u}) = (\text{Id}_{\mathbb{R}^n}, D\tau(\mathbf{u}), D\tau(\mathbf{u}))$ são injetoras, de modo que x é uma imersão. Ponha $M \doteq x[\Omega]$. Vejamos que M é uma subvariedade de tipo espaço de \mathbb{L}^{n+2} , com Segunda Forma Fundamental de tipo luz. Em particular, M é marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^{n+2} .

Inicialmente, observe que

$$\partial_{u^i}|_{x(\mathbf{u})} = \frac{\partial x}{\partial u^i}(\mathbf{u}) = \left(e_i, \frac{\partial \tau}{\partial u^i}(\mathbf{u}), \frac{\partial \tau}{\partial u^i}(\mathbf{u}) \right),$$

donde a métrica induzida em M por \mathbb{L}^{n+2} fica expressa em coordenadas por

$$\begin{aligned} g_{ij}(\mathbf{u}) &= \left\langle \left(e_i, \frac{\partial \tau}{\partial u^i}(\mathbf{u}), \frac{\partial \tau}{\partial u^i}(\mathbf{u}) \right), \left(e_j, \frac{\partial \tau}{\partial u^j}(\mathbf{u}), \frac{\partial \tau}{\partial u^j}(\mathbf{u}) \right) \right\rangle_1 \\ &= \delta_{ij} + \frac{\partial \tau}{\partial u^i}(\mathbf{u}) \frac{\partial \tau}{\partial u^j}(\mathbf{u}) - \frac{\partial \tau}{\partial u^i}(\mathbf{u}) \frac{\partial \tau}{\partial u^j}(\mathbf{u}) \\ &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $1 \leq i, j \leq n$. Para calcular a Segunda Forma Fundamental de M em \mathbb{L}^{n+2} , utilizamos a fórmula

$$\bar{\nabla}_{\partial_{u^i}} \partial_{u^j} = \nabla_{\partial_{u^i}} \partial_{u^j} + \text{II}(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}).$$

Como $g_{ij} = \delta_{ij}$, segue que a curvatura seccional de M e todos os Símbolos de Christoffel de x se anulam, e assim

$$\text{II}(\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = \bar{\nabla}_{\partial_{u^i}} \partial_{u^j} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j},$$

de modo que

$$\text{II}(X, Y) = \text{Hess}(x)(X, Y) = (\text{Hess}(\tau)(X, Y))(\mathbf{0}, 1, 1),$$

quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Assim II é sempre de tipo luz, e também

$$H \circ x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{II}(\partial_{u^i}, \partial_{u^i}) = \frac{\Delta \tau}{n}(\mathbf{0}, 1, 1),$$

donde M é w -marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^{n+2} .

Veremos ainda neste capítulo o Teorema 2.3.14 (p. 55), que nos diz que este exemplo engloba essencialmente todos aqueles com Segunda Forma Fundamental de tipo luz.

Exemplo 2.1.3. Sejam $I \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f \in C^\infty(I)$ tal que $f''(u) \neq 0$ para todo $u \in I$, e $x: I \times I \rightarrow \mathbb{L}^4$ definida por

$$x(u, v) \doteq (f(u), v, u, f(u)).$$

Calculando todas as derivadas relevantes, temos que

$$\begin{aligned} \partial_u|_{x(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) &= (f'(u), 0, 1, f'(u)), & \partial_v|_{x(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) &= (0, 1, 0, 0), \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}(u, v) &= (f''(u), 0, 0, f''(u)) & \text{e} & \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Disto segue que x é uma imersão. Ponha $M \doteq x[I \times I]$. A métrica induzida em M por \mathbb{L}^4 fica expressa nas coordenadas dadas simplesmente por $du^2 + dv^2$ e, como no exemplo anterior, temos que a curvatura Gaussiana de M é nula. Sua Segunda Forma Fundamental (no ponto $x(u, v)$) é

calculada como anteriormente:

$$\Pi = (f''(u), 0, 0, f''(u)) \otimes du \otimes du,$$

ou, se $X = X^u \partial_u + X^v \partial_v \in \mathfrak{X}(M)$ (e analogamente para Y), temos

$$\Pi(X, Y) = X^u Y^u (f''(u), 0, 0, f''(u)).$$

Note que Π é sempre de tipo luz, e segue disto que

$$H \circ x = \frac{1}{2} \text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_1} \Pi = \frac{\Pi(\partial_u, \partial_u) + \Pi(\partial_v, \partial_v)}{2} = \frac{1}{2} (f''(u), 0, 0, f''(u)),$$

de modo que M é marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^4 .

Este exemplo possui mais uma particularidade: a Segunda Forma Fundamental possui radical não-trivial em todos os pontos, ou seja, existem campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $\Pi(X, Y) = 0$, quaisquer que sejam $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Digamos, $X = \partial_v$ serve. Diremos que M possui *nulidade relativa positiva*. A relação desta condição com a propriedade de ser marginalmente aprisionada será devidamente explorada no Capítulo 3, onde daremos classificações destas superfícies nos ambientes $\mathbb{M}_1^4(c)$, seguindo [40].

Exemplo 2.1.4. Nas mesmas condições do exemplo anterior, pode-se considerar $x: I \times I \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ por $x(u, v) = (v, f(u), f(u), u)$. A superfície obtida também possui Segunda Forma Fundamental de tipo luz, é marginalmente aprisionada, e possui nulidade relativa positiva. Desta vez, a métrica induzida por \mathbb{R}_2^4 é Lorentziana ao invés de Riemanniana, expressando-se como $-du^2 + dv^2$.

Exemplo 2.1.5. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto e $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^4 f}{\partial u^2 \partial v^2} = 0.$$

Defina $x: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ por

$$x(u, v) \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} (f(u, v), u - v, u + v, f(u, v)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \partial_u|_{x(u,v)} &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), 1, 1, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \right) \quad \text{e} \\ \partial_v|_{x(u,v)} &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v), -1, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right), \end{aligned}$$

donde x é uma imersão e os coeficientes da métrica induzida em $M \doteq x[\Omega]$ são

$$(g_{ij})_{i,j=1}^2 = (g^{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, podemos calcular

$$\begin{aligned}\Pi(\partial_u, \partial_u) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, 0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \right), \\ \Pi(\partial_u, \partial_v) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, 0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right) \quad \text{e} \\ \Pi(\partial_v, \partial_v) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, 0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right),\end{aligned}$$

e temos que a Segunda Forma Fundamental de M é sempre de tipo luz. Ainda, temos que

$$\mathbf{H} \circ \mathbf{x} = \frac{1}{2} (-\Pi(\partial_u, \partial_v) - \Pi(\partial_v, \partial_u)) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, 0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \right),$$

e assim M é marginalmente aprisionada em \mathbb{R}_2^4 .

Como os exemplos anteriores, este também possui uma particularidade (a ser evidenciada pela condição sobre a derivada de quarta ordem de f , que ainda não utilizamos). Vendo f definida sobre M , podemos calcular o seu Laplaceano:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle_2} \text{Hess}(f) \\ &= -2 \text{Hess}(f)(\partial_u, \partial_v) \\ &= -2(\partial_u(\partial_v(f)) - \text{d}f(\nabla_{\partial_u} \partial_v)) \\ &= -2 \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v},\end{aligned}$$

usando que $\nabla_{\partial_u} \partial_v = \mathbf{0}$ (uma vez que os Símbolos de Christoffel se anulam). Repetindo, vemos que

$$\Delta^2 f = 4 \frac{\partial^4 f}{\partial u^2 \partial v^2} = 0$$

e, portanto, $\Delta^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Subvariedades de espaços pseudo-Euclidianos satisfazendo a condição $\Delta^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ são chamadas *bi-harmônicas*, e sua relação com subvariedades marginalmente aprisionadas é amplamente estudada. Por exemplo, em [41] e [45] é dada uma classificação² das superfícies bi-harmônicas e marginalmente aprisionadas no espaço neutro \mathbb{R}_2^4 .

Os exemplos acima ilustram que subvariedades marginalmente aprisionadas podem de fato possuir métricas Riemannianas ou Lorentzianas, dependendo do ambiente em que se encontram. Entretanto, todas as situações descritas apresentavam Segunda Forma Fundamental sempre proporcional a um mesmo vetor de tipo luz, fato este que implica na subvariedade ser *w*-marginalmente aprisionada. Todas estas subvariedades também estavam contidas em certos hiperplanos de tipo luz. Este é um detalhe importante que será estudado já na próxima seção.

Exemplo 2.1.6. Vejamos agora um exemplo, seguindo [48], de uma superfície marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^4 , cuja Segunda Forma Fundamental *não* seja, em geral, de tipo luz. Considere $\mathbf{x}:]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, \sinh v, \cosh v),$$

e ponha $M \doteq \mathbf{x}[]0, 2\pi[\times \mathbb{R}]$. Note que M está contida no cone de luz de \mathbb{L}^4 . Temos

$$\partial_u|_{\mathbf{x}(u,v)} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0, 0) \quad \text{e} \quad \partial_v|_{\mathbf{x}(u,v)} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = (0, 0, \cosh v, \sinh v),$$

²Possivelmente incompleta.

donde a métrica induzida em M é $du^2 + dv^2$ (de tipo espaço) e os Símbolos de Christoffel se anulam todos, de modo que no ponto $x(u, v)$ valem

$$\begin{aligned}\Pi(\partial_u, \partial_u) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} = (-\cos u, -\sin u, 0, 0), & \Pi(\partial_u, \partial_v) &= \mathbf{0} \quad \text{e} \\ \Pi(\partial_v, \partial_v) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} = (0, 0, \sinh v, \cosh v).\end{aligned}$$

Como afirmado, em geral Π não é de tipo luz. Entretanto, temos

$$H \circ \mathbf{x} = \frac{\Pi(\partial_u, \partial_u) + \Pi(\partial_v, \partial_v)}{2} = \frac{1}{2}(-\cos u, -\sin u, \sinh v, \cosh v),$$

que é sempre de tipo luz.

No exemplo acima vemos que mesmo que a Segunda Forma Fundamental da subvariedade não seja de tipo luz, ainda obtivemos que a subvariedade possuía curvatura $K = 0$. Assim, é natural indagar se toda subvariedade marginalmente aprisionada em algum ambiente deve possuir $K = 0$. Vemos a resposta negativa a seguir:

Exemplo 2.1.7. Considere a fatia de S_1^4 descrita por $x:]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[\rightarrow S_1^4 \subseteq \mathbb{L}^5$ dada por

$$x(u, v) \doteq (1, \cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, 1).$$

Com este domínio, a imagem $M \doteq x[]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[]$ é uma subvariedade mergulhada de S_1^4 , difeomorfa à um aberto denso de S^2 . Vejamos que M é marginalmente aprisionada em S_1^4 , mas não em \mathbb{L}^5 . Inicialmente, temos:

$$\begin{aligned}\partial_u|_{x(u,v)} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v) = (0, -\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u, 0) \quad \text{e} \\ \partial_v|_{x(u,v)} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v) = (0, -\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0, 0),\end{aligned}$$

de modo que a métrica induzida em M é dada em coordenadas por $du^2 + \cos^2 u dv^2$. Portanto M é uma subvariedade de tipo espaço. Neste ponto podemos observar que M é na verdade isométrica ao tal aberto denso de S^2 mencionado acima, e possui curvatura seccional constante e igual a 1.

Claramente $N(x(u, v)) \doteq x(u, v)$ é um campo normal e unitário ao longo de M , porém N não é tangente à S_1^4 , e sim normal. Denote as coordenadas em \mathbb{L}^5 por (x, y, z, w, t) . Por inspeção, vemos que $\partial_x + \partial_t$ é um campo de tipo luz normal ao longo de M e, sendo também ortogonal à N , é tangente à S_1^4 ao longo de M (mas não em geral fora dos pontos de M).

Utilizando a Proposição 1.2.34 (p. 33) e notando que $\partial_x + \partial_t$ é também ortogonal à todas as derivadas segundas de x , concluímos que se Π denota a Segunda Forma Fundamental de M relativa à S_1^4 , então

$$\langle \Pi(\partial_u, \partial_u), \partial_x + \partial_t \rangle_1 = \langle \Pi(\partial_u, \partial_v), \partial_x + \partial_t \rangle_1 = \langle \Pi(\partial_v, \partial_v), \partial_x + \partial_t \rangle_1 = 0.$$

Isto naturalmente implica que $\langle \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \partial_x + \partial_t \rangle_1 = 0$ quaisquer que sejam $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada $p \in M$, o complemento ortogonal de $T_p M$ relativo à $T_p S_1^4$ possui dimensão 2 e é de tipo tempo, contendo portanto dois raios de luz. Sendo $\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ normal à M , tangente à S_1^4 , e ortogonal à $\partial_x + \partial_t$, concluímos então que $\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ é sempre paralelo³ à $\partial_x + \partial_t$. Mais precisamente, calculando tediosamente os Símbolos de Christoffel (por exemplo, usando a Proposição 1.2.16,

³Atenção: isto *não* é uma consequência do Corolário 1.1.13 (p. 12).

p. 25), temos que

$$\nabla_{\partial_u} \partial_u = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\partial_u} \partial_v = -\tan u \partial_v \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_v} \partial_v = \sen u \cos u \partial_u,$$

donde a Proposição 1.2.34 nos dá⁴

$$\Pi(\partial_u, \partial_u) = \partial_x + \partial_t, \quad \Pi(\partial_u, \partial_v) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \Pi(\partial_v, \partial_v) = \cos^2 u (\partial_x + \partial_t),$$

e assim $\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_1 (\partial_x + \partial_t)$ é sempre de tipo luz. Em particular, $\mathbf{H} = \partial_x + \partial_t$ é de tipo luz, e M é marginalmente aprisionada em \mathbb{S}_1^4 .

Já se $\bar{\Pi}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ denotam a Segunda Forma Fundamental e o vetor curvatura média de M relativos à \mathbb{L}^5 , podemos utilizar a relação $\bar{\Pi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_1 \mathbf{N}$ e aproveitar os cálculos feitos acima para obter

$$\bar{\Pi}(\partial_u, \partial_u) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}, \quad \bar{\Pi}(\partial_u, \partial_v) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \bar{\Pi}(\partial_v, \partial_v) = \cos^2 u \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2},$$

donde

$$\bar{\Pi}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle_1 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}.$$

Observe que $\bar{\Pi}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ são sempre de tipo espaço, e não luz. Além disto, note que a projeção ortogonal de $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}$ nos espaços tangentes à \mathbb{S}_1^4 é $\partial_x + \partial_t$ (como deveria ser).

No exemplo acima, vemos que a superfície é marginalmente aprisionada, mas possui curvatura $K = 1 \neq 0$. Entretanto, a curvatura do ambiente \mathbb{S}_1^4 considerado também é igual a 1. Então poderíamos nos perguntar se uma subvariedade marginalmente aprisionada não pode possuir curvatura “extrínseca”. Registramos abaixo a resposta negativa:

Exemplo 2.1.8. Considere a curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$ dada por

$$\alpha(s) \doteq \left(4 \log \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) - \frac{s^2}{4}, -3s + 8 \arctan \left(\frac{s}{2} \right), 0, 1 + \frac{s^2}{4} \right).$$

Tem-se que α é de tipo espaço e possui velocidade unitária. Considere Σ_α a superfície de rotação hiperbólica gerada por α , imagem da aplicação $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma_\alpha$ dada por

$$x(s, \theta) \doteq \left(4 \log \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) - \frac{s^2}{4}, -3s + 8 \arctan \left(\frac{s}{2} \right), \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) \sinh \theta, \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) \cosh \theta \right).$$

Temos

$$\begin{aligned} \partial_s|_{x(s, \theta)} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s, \theta) = \left(\frac{12s - s^3}{2(4 + s^2)}, \frac{4 - 3s^2}{4 + s^2}, \frac{s}{2} \sinh \theta, \frac{s}{2} \cosh \theta \right) \quad \text{e} \\ \partial_\theta|_{x(s, \theta)} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta}(s, \theta) = \left(0, 0, \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) \cosh \theta, \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) \sinh \theta \right), \end{aligned}$$

de modo que a métrica induzida por \mathbb{L}^4 em Σ_α é apenas $ds^2 + \left(1 + \frac{s^2}{4} \right)^2 d\theta^2$. Calculando os Símbolos de Christoffel nestas coordenadas, temos:

$$\nabla_{\partial_s} \partial_s = \mathbf{0}, \quad \nabla_{\partial_s} \partial_\theta = \frac{2s}{4 + s^2} \partial_\theta \quad \text{e} \quad \nabla_{\partial_\theta} \partial_\theta = -\frac{s}{2} \left(1 + \frac{s^2}{4} \right) \partial_s.$$

⁴Lembrando que $\bar{\nabla}_{\partial_u} \partial_u = \partial^2 \mathbf{x} / \partial u^2$, etc..

Com isto, obtemos:

$$\begin{aligned}\Pi(\partial_s, \partial_s) &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial s^2} = \left(\frac{-s^4 - 24s^2 + 48}{2(4 + s^2)^2}, \frac{-32s}{(4 + s^2)^2}, \frac{1}{2} \sinh \theta, \frac{1}{2} \cosh \theta \right), \\ \Pi(\partial_s, \partial_\theta) &= \mathbf{0} \quad \text{e} \\ \Pi(\partial_\theta, \partial_\theta) &= \left(\frac{12s^2 - s^4}{16}, \frac{4s - 3s^3}{8}, \left(1 + \frac{s^2}{4}\right)^2 \sinh \theta, \left(1 + \frac{s^2}{4}\right)^2 \cosh \theta \right).\end{aligned}$$

De posse da Segunda Forma Fundamental de Σ_α , finalmente podemos calcular

$$\begin{aligned}H(\mathbf{x}(s, \theta)) &= \frac{1}{2} \left(\Pi(\partial_s, \partial_s) + \left(\frac{4}{4 + s^2} \right)^2 \Pi(\partial_\theta, \partial_\theta) \right) \\ &= \left(\frac{-3s^4 + 48}{4(4 + s^2)^2}, \frac{-12s - 3s^3}{(4 + s^2)^2}, \frac{3}{4} \sinh \theta, \frac{3}{4} \cosh \theta \right),\end{aligned}$$

que é de tipo luz⁵. E com um pouco mais de paciência, o Corolário 1.2.25 (p. 30) nos permite calcular a curvatura seccional de Σ_α :

$$K(\mathbf{x}(s, \theta)) = \frac{\langle \Pi(\partial_s, \partial_s), \Pi(\partial_\theta, \partial_\theta) \rangle_1}{\langle \partial_\theta, \partial_\theta \rangle_1} = \dots = -\frac{2}{4 + s^2}.$$

No Capítulo 4 veremos não apenas expressões para simplificar os cálculos feitos acima, mas também um procedimento para produzir superfícies de revolução marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^4 , com o Teorema 4.3.2 (p. 87). Em particular, a curvatura seccional poderá até ser prescrita.

2.2 Referenciais de Penrose e uma caracterização para II tipo luz

Durante toda esta seção, fixe uma variedade pseudo-Riemanniana $(\overline{M}^{n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ com métrica de índice $1 \leq \nu \leq n + 1$, e suponha que $M^n \subseteq \overline{M}^{n+2}$ é uma subvariedade não-degenerada tal que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ restrita aos espaços normais a M seja Lorentziana. Então cada espaço normal à M corta o cone de luz do respectivo espaço tangente à \overline{M} em dois raios de luz, nos permitindo definir um *referencial de Penrose* no fibrado normal de M , ou seja, dois campos de tipo luz $L_+, L_- \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ tais que $\langle L_+, L_- \rangle = 2$ é constante. Diremos que o referencial é 2-normalizado. Pode-se considerar também referenciais 1-normalizados ou (-1) -normalizados conforme for conveniente.

Se $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ é um campo normal à M , escrevendo ξ como combinação linear de L_+ e L_- e tomando produtos escalares, obtemos que

$$\xi = \frac{\langle \xi, L_- \rangle L_+ + \langle \xi, L_+ \rangle L_-}{2}.$$

Vamos registrar no seguinte lema como os objetos geométricos associados à M se expressam em termos deste novo referencial, quando $\overline{M}^{n+2} = \mathbb{M}_\nu^{n+2}(c)$ é uma forma espacial pseudo-Riemanniana (recorde o Exemplo 1.2.19, p. 27):

Lema 2.2.1. *Sejam $M^n \subseteq \mathbb{M}_\nu^{n+2}(c)$, $c \in \{-1, 0, 1\}$, uma subvariedade não-degenerada tal que a métrica restrita aos espaços normais à M seja Lorentziana, (E_1, \dots, E_n) um referencial local tangente à M , e*

⁵Eu juro!

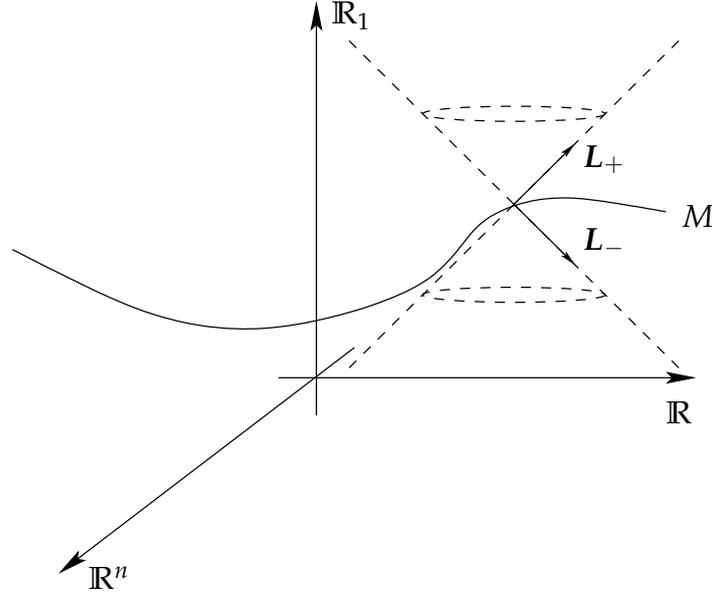


Figura 2.1: Referencial de Penrose normal à uma subvariedade de tipo espaço $M^n \subseteq \mathbb{L}^{n+2}$.

(L_+, L_-) um referencial de Penrose 2-normalizado e normal à M . Escrevendo

$$A_{L_{\pm}}(E_j) = \sum_{i=1}^n h_{\pm}^i E_i \quad e \quad \Pi(E_i, E_j) = h_{ij}^+ L_+ + h_{ij}^- L_-,$$

de modo análogo à Proposição 1.2.29 (p. 31), valem:

- (i) $\langle \Pi(E_i, E_j), L_{\pm} \rangle_v = 2h_{ij}^{\mp}$.
- (ii) $d(L_{\pm})(E_j) = -\sum_{i=1}^n h_{\pm}^i E_i + \frac{1}{2} \langle d(L_{\pm})(E_j), L_{\mp} \rangle_v L_{\pm}$.
- (iii) Se o referencial tangente é ortonormal, $h_{\pm}^i = 2\epsilon_i h_{ij}^{\mp}$, onde ϵ_i abrevia o indicador de E_i .
- (iv) $H = \frac{1}{n} \frac{\text{tr}(A_{L_-})L_+ + \text{tr}(A_{L_+})L_-}{2}$.

Observação. Se temos uma constante de normalização arbitrária $\langle L_+, L_- \rangle = a \neq 0$, basta trocar 2 por a nas expressões acima.

Demonstração:

- (i) Faça $\xi = \Pi(E_i, E_j)$ na discussão acima.
- (ii) Façamos primeiro o caso em que $c = 0$, ou seja, em que o ambiente é \mathbb{R}_v^{n+2} . Note que

$$d(L_{\pm})(E_j) = \bar{\nabla}_{E_j} L_{\pm} = -A_{L_{\pm}}(E_j) + aL_+ + bL_- = -\sum_{i=1}^n h_{\pm}^i E_i + aL_+ + bL_-,$$

para certos coeficientes a e b a serem determinados. Consideremos sem perder generalidade o caso $+$. Por um lado, temos

$$\langle d(L_+)(E_j), L_+ \rangle_v = \langle \bar{\nabla}_{E_j} L_+, L_+ \rangle_v = -\langle L_+, \bar{\nabla}_{E_j} L_+ \rangle_v,$$

donde $\langle d(L_+)(E_j), L_+ \rangle_v = 0$, qualquer que seja $1 \leq j \leq n$, usando que $\langle L_+, E_j \rangle_v = 0$. Por outro lado, também temos que $\langle d(L_+)(E_j), L_+ \rangle_v = 2b$, donde $b = 0$. Com isto, aplicar $\langle \cdot, L_- \rangle_v$ nos dá

$$\langle d(L_+)(E_j), L_- \rangle_v = 2a,$$

como desejado.

Quando o ambiente é S_v^{n+2} ou \mathbb{H}_v^{n+2} , apelamos então para a Proposição 1.2.34 (p. 33): chamando $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}_v^{n+3} ou \mathbb{R}_{v+1}^{n+3} , e $N(x) = x$ o campo normal e unitário ao longo de $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$, temos que

$$\begin{aligned} \langle d(L_\pm)(X), N \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X L_\pm, N \rangle \\ &= X \langle L_\pm, N \rangle - \langle L_\pm, \overline{\nabla}_X N \rangle \\ &= - \langle L_\pm, dN(X) \rangle \\ &= - \langle L_\pm, X \rangle = 0, \end{aligned}$$

de modo que $d(L_\pm)$ nunca possui componente na direção de N . Assim, o resto do cálculo segue como na situação inicial considerada.

(iii) Utilizamos a Proposição 1.2.29 (p. 31), identificando $n+1 \leftrightarrow +$ e $n+2 \leftrightarrow -$. Temos:

$$h_{+j}^i = \sum_{\ell=1}^n (h_{\ell j}^+ g_{++} g^{i\ell} + h_{\ell j}^- g_{+-} g^{i\ell}) = \sum_{\ell=1}^n 2h_{\ell j}^- g^{i\ell} = 2\epsilon_i h_{ij}^-.$$

A dedução da outra expressão é análoga.

(iv) Suponha novamente que (E_1, \dots, E_n) é ortonormal. Façamos a conta localmente. Utilizando os itens anteriores, temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\langle H, L_- \rangle_v L_+ + \langle H, L_+ \rangle_v L_-}{2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \Pi(E_i, E_i), L_- \rangle_v L_+ + \epsilon_i \langle \Pi(E_i, E_i), L_+ \rangle_v L_-}{2n} \\ &\stackrel{(i)}{=} \frac{\sum_{i=1}^n 2\epsilon_i h_{ii}^+ L_+ + 2\epsilon_i h_{ii}^- L_-}{2n} \\ &\stackrel{(iii)}{=} \frac{\sum_{i=1}^n h_{-i}^i L_+ + h_{+i}^i L_-}{2n} \\ &= \frac{1}{n} \frac{\text{tr}(A_{L_-}) L_+ + \text{tr}(A_{L_+}) L_-}{2} \end{aligned}$$

□

Observação (Comentário sobre notação e nomenclatura). Suponha que $(\overline{M}^{n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ seja um espaço-tempo, ou seja, uma variedade Lorentziana (conexa) munida de uma orientação temporal⁶, e que tenhamos um referencial de Penrose (L_+, L_-) (-2) -normalizado e normal ao longo de uma subvariedade não-degenerada $M^n \subseteq \overline{M}$ (que é automaticamente de tipo espaço). Note que a constante de normalização do referencial de Penrose tomado é negativa se e somente se os campos L_+ e L_- possuem a mesma orientação temporal, que suporemos futuro-dirigida. Definem-se

⁶Ou seja, existe e é fixado um campo de tipo tempo U definido globalmente ao longo de toda \overline{M} . Dado $p \in \overline{M}$, tal campo U nos permite dizer que um vetor $v \in T_p \overline{M}$ de tipo tempo ou luz é futuro ou passado-dirigido conforme $\langle v, U_p \rangle$ é negativo ou positivo, respectivamente.

as Segundas Formas Fundamentais escalares associadas a (L_+, L_-) por $\chi_{\pm}(X, Y) \doteq \langle \bar{\nabla}_X L_{\pm}, Y \rangle$, os escalares de expansão de luz como $\theta_{\pm} \doteq \text{tr} \langle \cdot, \cdot \rangle \chi_{\pm}$, e a torção do referencial como a 1-forma $\zeta \in \mathfrak{X}^*(M)$ dada por $\zeta(X) \doteq -\frac{1}{2} \langle \bar{\nabla}_X L_+, L_- \rangle$. O nome “torção” está justificado pelo Lema 2.2.1 acima, que nos dá a expressão $d(L_+)(X) = -A_{L_+}(X) + \zeta(X)L_+$. Além disto, se (E_1, \dots, E_n) é um referencial ortonormal local e tangente à M , temos que

$$(\chi_{\pm})_{ij} \doteq \chi_{\pm}(E_i, E_j) = \langle \bar{\nabla}_{E_i} L_{\pm}, E_j \rangle = -\langle L_{\pm}, \bar{\nabla}_{E_i} E_j \rangle = -\langle \Pi(E_i, E_j), L_{\pm} \rangle = -2h_{ij}^{\mp},$$

e assim

$$\theta_{\pm} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i (\chi_{\pm})_{ii} = -\sum_{i=1}^n 2\epsilon_i h_{ii}^{\mp} = -\sum_{i=1}^n h_{\pm i}^i = -\text{tr}(A_{L_{\pm}}).$$

Com esta nomenclatura, o resultado acima nos diz que

$$\langle H, H \rangle = \frac{\theta_+ \theta_-}{n^2},$$

de modo que M é marginalmente aprisionada se e somente se pelo menos um dos escalares de expansão de luz é nulo.

O caso fisicamente relevante é quando $\theta_+ = 0$, onde M é dita ser marginalmente aprisionada *exteriormente*⁷, conforme a seguinte figura:

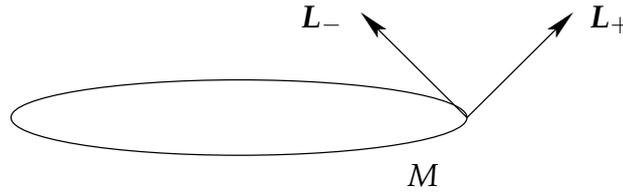


Figura 2.2: Interpretação física para (L_+, L_-) .

Se M é uma subvariedade fechada (e orientável), há um modo natural de construir um tal referencial (L_+, L_-) nas condições acima. Considere Σ uma hipersuperfície de tipo espaço⁸ de \bar{M} contendo M , e sejam N_{n+1} o vetor unitário de tipo espaço normal exterior à M e tangente à Σ , e N_{n+2} o vetor de tipo tempo unitário e futuro-dirigido normal à Σ , em \bar{M} . Basta colocar

$$L_+ \doteq N_{n+1} + N_{n+2} \quad \text{e} \quad L_- \doteq -N_{n+1} + N_{n+2},$$

conforme o esquema a seguir:

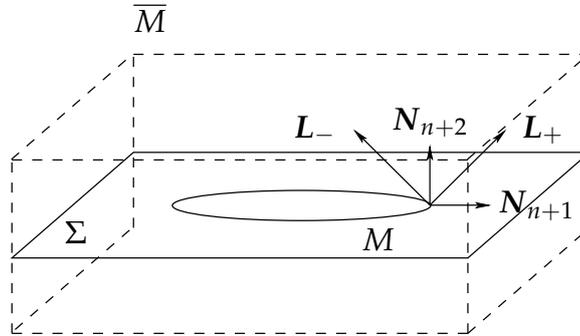


Figura 2.3: Interpretação física para (L_+, L_-) , parte 2.

Compare os comentários acima com as várias referências [44], [50], [51], etc..

⁷MOTS = Marginally Outer Trapped Surface (Submanifold).

⁸Sempre existe. Por exemplo, uma ideia é considerar um campo de tipo espaço normal à M , e “espalhar” M utilizando o fluxo de tal campo, efetivamente “engordando” M .

Lema 2.2.2. *Sejam $M^n \subseteq \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$, $c \in \{-1, 0, 1\}$, uma subvariedade não-degenerada tal que a métrica restrita aos espaços normais à M seja Lorentziana e (L_+, L_-) um referencial de Penrose 2-normalizado e normal à M . Se a Segunda Forma Fundamental de M é paralela à L_+ (e em particular, é de tipo luz), então o vetor curvatura média H também é paralelo à L_+ e a diferencial $d(L_+)$ tem posto no máximo 1. Se $M^n \subseteq \mathbb{M}_1^{n+2}(c)$ é de tipo espaço, vale a recíproca.*

Demonstração: Suponha que a Segunda Forma Fundamental de M é paralela à L_+ . Então claramente H também o é. Resta ver que o posto de $d(L_+)$ é no máximo 1. Para tal, considere um referencial ortonormal local e tangente a M , (E_1, \dots, E_n) . Assim:

$$0 = \langle \Pi(E_i, E_j), L_+ \rangle_v = 2h_{ij}^-,$$

e o item (ii) do lema anterior nos dá que $h_{+j}^i = 0$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Com isto, o item (iii) em seguida nos diz que

$$d(L_+)(E_j) = \frac{1}{2} \langle d(L_+)(E_j), L_- \rangle_v L_+,$$

como queríamos.

Reciprocamente, suponha que M seja de tipo espaço, H seja paralelo a L_+ e que $d(L_+)$ tenha posto no máximo 1. Fixado novamente um referencial ortonormal local e tangente a M , (E_1, \dots, E_n) , como $\epsilon_i = 1$ para $1 \leq i \leq n$ e $(h_{+j}^i)_{i,j=1}^n$ tem posto no máximo 1, o mesmo vale para $(h_{ij}^-)_{i,j=1}^n$. Por simetria desta última matriz, sabemos da Álgebra Linear⁹ que existem coeficientes $c, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que $h_{ij}^- = c\lambda_i\lambda_j$, para $1 \leq i, j \leq n$. Sendo H paralelo à L_+ , temos que

$$0 = \left\langle \frac{nH}{2}, L_+ \right\rangle_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle \Pi(E_i, E_i), L_+ \rangle_1 = \sum_{i=1}^n h_{ii}^- = c \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

donde $c = 0$ ou $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbf{0}$. De qualquer modo, segue que $h_{ij}^- = 0$ quaisquer que sejam $1 \leq i, j \leq n$ e assim Π é sempre paralela à L_+ , como queríamos. \square

Exemplo 2.2.3 (Contra-exemplo). O Lema 2.2.2 acima foi enunciado em [49] apenas quando o ambiente era \mathbb{R}_v^{n+2} , porém com maior generalidade, afirmando que a recíproca era verdadeira mesmo quando o índice da métrica induzida em M era arbitrário. A demonstração ali apresentada encontra-se incorreta: por expansão ortonormal (Lema 1.1.7, p. 10), a matriz $(h_{+j}^i)_{i,j=1}^n$ não é simétrica se M não é de tipo espaço, valendo a expressão mais geral $h_{+i}^j = \epsilon_i \epsilon_j h_{+j}^i$ num referencial ortonormal. Não se pode mais concluir que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbf{0}$.

Para apresentar um contra-exemplo, começamos com uma ideia mais básica: em \mathbb{L}^2 , ponha $u \doteq (x+y)/\sqrt{2}$ e $v \doteq (x-y)/\sqrt{2}$.

Em tais coordenadas (u, v) , temos que a métrica de \mathbb{L}^2 se expressa simplesmente como

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_1 = du \otimes dv + dv \otimes du.$$

Olhando para o espaço neutro \mathbb{R}_2^4 como produto de duas cópias de \mathbb{L}^2 e aplicando esta construção, obtemos coordenadas (u, v, w, z) nas quais a métrica de \mathbb{R}_2^4 é dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = du \otimes dv + dv \otimes du + dw \otimes dz + dz \otimes dw.$$

Note que os Símbolos de Christoffel para estas coordenadas são todos nulos, e assim $\bar{\nabla}$ fica expressa em termos dos campos $\partial_u, \partial_v, \partial_w$ e ∂_z (duais a du, dv, dw e dz , todos de tipo luz) como

⁹Se V é um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \text{Lin}(V)$ possui posto no máximo 1, temos que $T(x) = f(x)x_0$ para certos $x_0 \in V$ e $f \in V^*$, qualquer que seja $x \in V$. Mediante a identificação natural $\text{Lin}(V) \cong V^* \otimes V$, escrevemos $T = f \otimes x_0$. Se \mathcal{B} é uma base de V e \mathcal{B}^* é a correspondente base dual, temos $[T]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}^*}^\top [x_0]_{\mathcal{B}}$. Sendo esta última matriz simétrica, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $[f]_{\mathcal{B}^*} = c[x_0]_{\mathcal{B}}$.

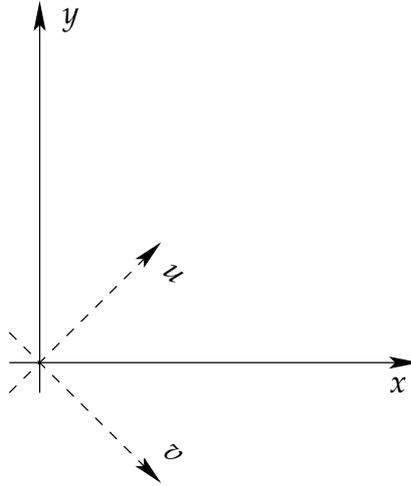


Figura 2.4: Coordenadas de tipo luz em \mathbb{L}^2 .

nas coordenadas retangulares usuais. Considere finalmente a superfície

$$M \doteq \{(0, w^2, w, z) \in \mathbb{R}_2^4 \mid w, z \in \mathbb{R}\}.$$

Tome a parametrização global $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, dada por $\varphi(s, t) \doteq (0, s^2, s, t)$. Temos que

$$\partial_s|_{\varphi(s,t)} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = 2s\partial_w|_{\varphi(s,t)} + \partial_w|_{\varphi(s,t)} \quad \text{e} \quad \partial_t|_{\varphi(s,t)} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = \partial_z|_{\varphi(s,t)},$$

de modo que, identificando $s \leftrightarrow 1$ e $t \leftrightarrow 2$ como sempre, os coeficientes da métrica induzida em M nestas coordenadas são

$$(g_{ij})_{i,j=1}^2 = (g^{ij})_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a métrica induzida tanto em M como nos seus espaços normais é Lorentziana. Em particular os coeficientes acima nos dizem que os Símbolos de Christoffel da métrica induzida em M nas coordenadas (s, t) se anulam. Assim, como a única derivada parcial de segunda ordem de φ não-nula é

$$L_- \doteq \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = 2\partial_w,$$

temos que a Segunda Forma Fundamental de M é dada por

$$\Pi = L_- \otimes ds \otimes ds,$$

como nos exemplos iniciais apresentados na Seção 2.1. Note que L_- é de tipo luz, e normal à M . Segue disto também que o vetor curvatura média de M é identicamente nulo. Com efeito:

$$\begin{aligned} H \circ \varphi &= \frac{1}{2} \text{tr}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \Pi \\ &= \frac{\Pi(\partial_s, \partial_t) + \Pi(\partial_t, \partial_s)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s} \right) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Considere agora o campo $L_+: M \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ dado por

$$L_+|_{\varphi(s,t)} \doteq \partial_u|_{\varphi(s,t)} - 2s\partial_z|_{\varphi(s,t)}.$$

Note que L_+ também é de tipo luz, normal à M , e satisfaz $\langle L_+, L_- \rangle_2 = 2$ em todos os pontos. Ainda mais, L_+ admite uma extensão linear óbvia para o ambiente \mathbb{R}_2^4 todo, o que nos permite calcular facilmente a diferencial $d(L_+)$ em cada ponto $\varphi(s, t)$. Temos que

$$d(L_+)(\partial_s) = d(L_+)(2s\partial_v + \partial_w) = 2s d(L_+)(\partial_v) + d(L_+)(\partial_w) = \mathbf{0} - 2\partial_z = -2\partial_z$$

e também

$$d(L_+)(\partial_t) = d(L_+)(\partial_z) = \mathbf{0},$$

de modo que $d(L_+) = -2\partial_z \otimes ds$ tem posto 1. Apesar disto, H é paralelo à L_+ , mas Π não o é.

Teorema 2.2.4. *Sejam $L_0 \in \mathbb{R}_v^{n+2}$ um vetor de tipo luz e $M^n \subseteq \mathbb{R}_v^{n+2}$ uma subvariedade não-degenerada tal que $M^n \subseteq L_0^\perp$. Então M possui Segunda Forma Fundamental de tipo luz em todos os pontos, e seus fibrados tangente e normal são planos. Reciprocamente, se M^n possui Segunda Forma Fundamental de tipo luz, todo ponto de M admite uma vizinhança (em M) contida em um hiperplano afim de tipo luz.*

Observação. Como curvaturas são locais, o resultado acima implica que toda subvariedade de codimensão 2 com Segunda Forma Fundamental de tipo luz possui os fibrados tangente e normal planos.

Demonstração: Como M é não-degenerada e possui codimensão 2, a métrica restrita aos espaços normais à M é não-degenerada e não-definida, de modo que a presença de L_0 em cada espaço normal a M (visto que $M \subseteq L_0^\perp$) garante que a restrição da métrica aos espaços normais à M é Lorentziana. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer, note que derivar $\langle Y, L_0 \rangle_v = 0$ na direção de X nos dá (usando que L_0 é constante) que $\langle \nabla_X Y, L_0 \rangle_v = 0$. Sendo L_0 normal à M , também temos $\langle \nabla_X Y, L_0 \rangle_v = 0$, donde $\langle \Pi(X, Y), L_0 \rangle_v = 0$. Disto concluímos duas coisas: que $\Pi(X, Y)$ é sempre paralelo à L_0 (pelo Lema 2.2.1, p. 41, por exemplo), e que o operador de Weingarten A_{L_0} é nulo.

Assim, a equação de Gauss (Proposição 1.2.24, p. 29) nos diz que $R(X, Y, Z, W) = 0$ quaisquer que sejam os campos $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, e portanto $R = \mathbf{0}$. Analogamente, a equação de Ricci (Proposição 1.2.32, p. 33) nos diz que $\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle_v = 0$ quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, donde $R^\perp = \mathbf{0}$. Com efeito, usando que $A_{L_0} = 0$ temos que $[A_\xi, A_\eta] = 0$, visto que a aplicação $\mathfrak{X}^\perp(M) \ni \xi \mapsto A_\xi \in \text{Lin}(\mathfrak{X}(M))$ é $C^\infty(M)$ -linear e $[\cdot, \cdot]$ é anti-simétrico.

Reciprocamente, suponha agora que $M^n \subseteq \mathbb{R}_v^{n+2}$ possua Segunda Forma Fundamental de tipo luz. Então, pelo mesmo argumento dado acima (usando Π ao invés de L_0), a métrica restrita aos espaços normais à M é Lorentziana, e podemos fixar um referencial de Penrose (L_+, L_-) 2-normalizado e normal à M . Visto que só existem duas direções de tipo luz linearmente independentes e normais à M , podemos supor que Π é sempre paralelo à L_+ , renomeando os vetores normais se necessário¹⁰. Pelo Lema 2.2.2 (p. 45), temos que $d(L_+)(X)$ é paralelo à L_+ , qualquer que seja $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Afirmação. *A torção ζ do referencial (L_+, L_-) é uma 1-forma fechada. Isto implica que em algum aberto conexo W de M , tem-se que $L_+ = e^\lambda L_0$ para certos $\lambda \in C^\infty(W)$ e $L_0 \in \mathbb{R}_v^{n+2}$ de tipo luz, constante.*

Justificativa: Analisamos a situação em coordenadas $(W, (u^1, \dots, u^n)) \in \Sigma(M)$. Da demonstração do Lema 2.2.2, temos que

$$d(L_+) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) \equiv \frac{\partial L_+}{\partial u^i} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial L_+}{\partial u^i}, L_- \right\rangle_v L_+, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Sendo ζ_i o coeficiente de L_+ no lado direito da expressão acima, vejamos que $\partial \zeta_i / \partial u^j = \partial \zeta_j / \partial u^i$, para todos os índices $1 \leq i, j \leq n$. Inicialmente temos que

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial u^j} = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{\partial^2 L_+}{\partial u^j \partial u^i}, L_- \right\rangle_v + \left\langle \frac{\partial L_+}{\partial u^i}, \frac{\partial L_-}{\partial u^j} \right\rangle_v \right).$$

¹⁰Como Π nunca se anula, não há o risco de Π passar a ser paralela à L_- , de forma não-suave. Isto é um detalhe importante que voltaremos a mencionar em breve.

Utilizando que $\langle L_+, L_- \rangle_v = 2$ é constante, obtemos que

$$\left\langle \frac{\partial L_+}{\partial u^i}, \frac{\partial L_-}{\partial u^i} \right\rangle_v = - \left\langle L_+, \frac{\partial^2 L_-}{\partial u^i \partial u^i} \right\rangle_v = - \left\langle L_+, \frac{\partial^2 L_+}{\partial u^i \partial u^i} \right\rangle_v = \left\langle \frac{\partial L_+}{\partial u^i}, \frac{\partial L_-}{\partial u^i} \right\rangle_v,$$

como queríamos. Isto nos diz que a torção ζ é fechada e, portanto, localmente exata. Assim, reduzindo W se necessário, tomamos $\lambda \in C^\infty(W)$ tal que $\zeta = d\lambda$.

Agora, escrevendo $L_+ = (L_+^1, \dots, L_+^{n+2})$, podemos resolver a primeira equação diferencial em destaque, coordenada por coordenada. A condição $dL_+^i = L_+^i \zeta$ lê-se como $d \log L_+^i = d\lambda$, e assim $\log L_+^i = \lambda + C_i$, para certo $C_i \in \mathbb{R}$, para cada i tal que $L_+^i \neq 0$. Nestas condições, segue que $L_+^i = e^\lambda L_0^i$, com $L_0^i \in \mathbb{R}$. Para os índices i tais que $L_+^i = 0$, defina $L_0^i \doteq 0$. Então, pondo $L_0 \doteq (L_0^1, \dots, L_0^{n+2}) \in \mathbb{R}_v^{n+2}$, vem que $L_+ = e^\lambda L_0$, como queríamos. Claramente tal L_0 deve ser de tipo luz. ■

Com isto, só resta ver que W está contido no hiperplano afim de tipo luz normal à L_0 , que passa por p_0 . De fato, definimos $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(p) = \langle p, L_0 \rangle_v$. Temos que $df_p(v) = \langle v, L_0 \rangle_v = 0$. Isto nos diz que f é constante e assim segue a conclusão. □

Observação. Veja o Apêndice A para uma classificação *total* das curvas marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^3 .

Grande parte do argumento acima pode ser aproveitada, nos dando também o seguinte resultado:

Teorema 2.2.5. Fixe $c \in \{-1, 1\}$. Sejam $L_0 \in \mathbb{R}_v^{n+3}$ (ou \mathbb{R}_{v+1}^{n+3} , conforme $c = 1$ ou -1) um vetor de tipo luz e $M^n \subseteq \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ uma subvariedade não degenerada tal que $M^n \subseteq L_0^\perp \cap \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$. Então M possui Segunda Forma Fundamental de tipo luz em todos os pontos, curvatura seccional constante e igual a c , e fibrado normal plano. Reciprocamente, se M^n possui Segunda Forma Fundamental de tipo luz, todo ponto de M admite uma vizinhança (em M) contida na interseção de um hiperplano afim de tipo luz com $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$.

Demonstração: Note que $L_0^\perp \cap \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ é uma hipersuperfície de tipo luz em $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$. Visto que $T_p(\mathbb{M}_v^{n+2}(c)) = p^\perp$ e para todo $p \in L_0^\perp \cap \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ vale $\langle p, L_0 \rangle = 0$, concluímos que L_0 é tangente à $L_0^\perp \cap \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ em todos os seus pontos¹¹. Disto isto, exatamente como na demonstração do Teorema 2.2.4 acima concluímos que a Segunda Forma Fundamental de M é sempre de tipo luz e que $A_{L_0} = 0$.

Assim, lembrando que a Segunda Forma Fundamental de $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ em \mathbb{R}_v^{n+3} ou \mathbb{R}_{v+1}^{n+3} é $\bar{\Pi}(X, Y) = -c \langle X, Y \rangle N$, onde $N(x) = x$, o fato de Π ser de tipo luz faz com que a equação de Gauss (Proposição 1.2.24, p. 29) reduza-se a

$$R(X, Y, Z, W) = c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle),$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, donde M possui curvatura seccional constante e igual a c . Já o argumento de que $R^\perp = 0$ é exatamente o mesmo dado anteriormente usando a equação de Ricci (Proposição 1.2.32, p. 33).

A demonstração da recíproca também não muda. □

Observação. Os teoremas 2.2.4 e 2.2.5 foram enunciados aqui separadamente por motivos puramente didáticos.

Exemplo 2.2.6. Observe que em geral, a condição de que a Segunda Forma Fundamental de M seja sempre de tipo luz é muito similar à condição $\langle \Pi(X, Y), \Pi(X, Y) \rangle = 0$, sendo a principal diferença a ocorrência de pontos planos de M (aqueles nos quais a Segunda Forma Fundamental se anula).

¹¹Entretanto, nada garante que L_0 continue tangente à $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ nos pontos fora da interseção $L_0^\perp \cap \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$, e isto em geral não ocorre.

Considere o seguinte exemplo, em \mathbb{L}^4 : no aberto $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < u^2 + v^2 < 4\}$, considere uma função suave $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ que seja positiva nos conjuntos

$$V_1 \doteq \{(u, v) \in U \mid 2 - \sqrt{1 - u^2} < v < \sqrt{4 - u^2}\} \text{ e}$$

$$V_2 \doteq \{(u, v) \in U \mid -\sqrt{4 - u^2} < v < -2 + \sqrt{1 - u^2}\},$$

e que se anule em $U \setminus (V_1 \cup V_2)$.

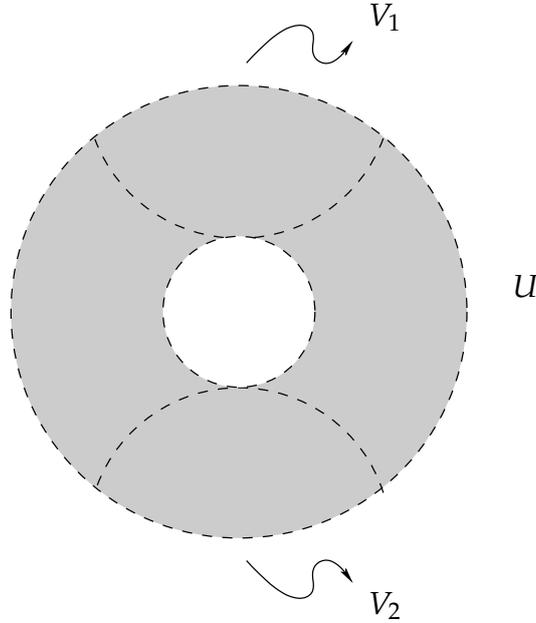


Figura 2.5: As regiões U , V_1 e V_2 .

A imagem de $x: U \rightarrow M \doteq x[U] \subseteq \mathbb{L}^4$ dada por

$$x(u, v) = \begin{cases} (f(u, v), u, v, f(u, v)), & \text{se } v \geq 0, \\ (-f(u, v), u, v, f(u, v)), & \text{se } v < 0 \end{cases}$$

é uma superfície de tipo espaço e satisfaz $\langle \Pi(X, Y), \Pi(Z, W) \rangle = 0$ para todos os campos tangentes $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, porém M possui pontos planos e não está contida em nenhum hiperplano de \mathbb{L}^4 .

Concluimos esta discussão com a seguinte:

Observação.

- Note que se a própria M é simplesmente conexa, a recíproca dos teoremas 2.2.4 e 2.2.5 vale globalmente (isto é, M está inteiramente contida em um mesmo hiperplano de tipo luz). Pelo menos para superfícies em ambientes Lorentzianos de dimensão 4, esta hipótese é dispensável, mas a técnica de demonstração é diferente e apela para o Teorema de Erbacher-Magid (redução de codimensão, [31]), veja [46].
- As demonstrações acima também sugerem o seguinte resultado geral, de simples verificação: se $(\overline{M}^{n+2}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade pseudo-Riemanniana, $M^n \subseteq \overline{M}$ é uma subvariedade não-degenerada, e $L_0 \in \mathfrak{X}^\perp(M)$ é um campo de tipo luz paralelo, então M possui Segunda Forma Fundamental sempre proporcional a L_0 em todos os pontos.

No restante deste capítulo, voltaremos a nossa atenção para uma certa noção de *isotropia* de subvariedades.

2.3 Superfícies isotrópicas em formas espaciais Lorentzianas

2.3.1 Isotropia e pseudo-umbilicidade

Definição 2.3.1. Sejam $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M \subseteq \overline{M}$ uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} . Diremos que M é *isotrópica* em $p \in M$ se existe $\lambda(p) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\langle \Pi(v, v), \Pi(v, v) \rangle = \lambda(p),$$

para todo $v \in T_p M$ unitário. Diremos que M é *isotrópica* se for isotrópica em todos os seus pontos. Sendo este o caso, temos a chamada *função de isotropia* $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}$, e diremos simplesmente que M é λ -isotrópica.

Observação.

- Note que se M é totalmente umbílica, então M é $\langle H, H \rangle$ -isotrópica, mas a recíproca é falsa em geral. Por exemplo, considere $n = 2$ no Exemplo 2.1.2 (p. 36) e ponha $\tau(u, v) = e^u$: a superfície obtida é 0-isotrópica (na verdade, até marginalmente aprisionada), mas não é totalmente umbílica.
- Se o ambiente \overline{M} possui curvatura seccional constante e M é totalmente umbílica, então $\nabla^\perp H = 0$ e $\langle H, H \rangle$ também é constante. Com efeito, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer, a condição $\Pi(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$ implica que $\nabla^\perp \Pi(Y, Z; X) = \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H$, e a equação de Codazzi-Mainardi (Proposição 1.2.33, p. 33) lê-se como

$$\langle \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H - \langle X, Z \rangle \nabla_Y^\perp H, \xi \rangle = 0,$$

qualquer que seja $\xi \in \mathfrak{X}^\perp(M)$. Dado X , escolha $Y = Z$ unitário e ortogonal à X . A arbitrariedade de ξ nos diz que $\nabla_X^\perp H$ deve ser tangente à M , e portanto $\nabla_X^\perp H = 0$.

Lema 2.3.2. Sejam $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana, $M \subseteq \overline{M}$ uma subvariedade não-degenerada com $\dim M \geq 2$ e $p \in M$. Então M é isotrópica em p se e somente se vale

$$\begin{aligned} \langle \Pi(u, v), \Pi(z, w) \rangle + \langle \Pi(v, z), \Pi(u, w) \rangle + \langle \Pi(u, z), \Pi(v, w) \rangle &= \\ &= \lambda(p) (\langle u, v \rangle \langle z, w \rangle + \langle v, z \rangle \langle u, w \rangle + \langle u, z \rangle \langle v, w \rangle), \end{aligned} \quad (\diamond)$$

quaisquer que sejam $u, v, z, w \in T_p M$. Em particular, se $u, v \in T_p M$ são ortogonais, valem:

$$(i) \quad \langle \Pi(u, u), \Pi(v, v) \rangle + 2 \langle \Pi(u, v), \Pi(u, v) \rangle = \lambda(p) \epsilon_u \epsilon_v, \text{ se } u \text{ e } v \text{ forem unitários.}$$

$$(ii) \quad \langle \Pi(u, u), \Pi(u, v) \rangle = 0.$$

Demonstração: É essencialmente a demonstração do Lema 2 em [30] adaptada para o caso pseudo-Riemanniano, que esboçaremos abaixo. Suponha que M é λ -isotrópica. Vamos deduzir (\diamond) e concluir (i) e (ii) no meio do caminho. Defina $F: (T_p M)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$F(u, v, z, w) \doteq \langle \Pi(u, v), \Pi(z, w) \rangle - \lambda(p) \langle u, v \rangle \langle z, w \rangle.$$

Note que F é quadrilinear, simétrica nos dois primeiros e dois últimos argumentos, bem como simétrica sobre a troca dos dois primeiros argumentos com os dois últimos. A isotropia de M nos diz que $B(u) \doteq F(u, u, u, u) = 0$ para todo vetor unitário $u \in T_p M$. Por multilinearidade, vale que $B(u) = 0$ para todo u que não seja de tipo luz. Finalmente, como todo vetor de tipo luz é limite de uma sequência de vetores não-luz¹², concluímos por continuidade que $B = 0$ como

¹²Se u é de tipo luz, tome $v \neq 0$ ortogonal à u que não seja de tipo luz (existe pois $\dim M \geq 2$ e M é não-degenerada), e ponha $u_n \doteq u + (v/n)$. Claramente $u_n \rightarrow u$, mas $\langle u_n, u_n \rangle = \langle v, v \rangle / n^2 \neq 0$.

na demonstração original. Daqui em diante não há mudanças: expandir a expressão $B(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + B(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$ nos dá

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) + 2F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0,$$

e assim concluímos o item (i) do enunciado. Prosseguindo, temos que trocar \mathbf{v} por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ acima nos dá $F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$, enquanto que trocar \mathbf{v} por $\mathbf{z} + \mathbf{w}$ nos dá

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) + 2F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0,$$

e assim concluímos o item (ii) do enunciado. Finalmente, trocando \mathbf{u} por $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ nesta última expressão resulta em

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) + F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + F(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0,$$

donde segue (\diamond). Note a semelhança de F com tensores de tipo curvatura¹³ (a expressão acima é a primeira identidade de Bianchi). E que (\diamond) implica em M é isotrópica é claro. \square

Lema 2.3.3. *Sejam $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície não-degenerada e λ -isotrópica. Então M é pseudo-umbílica e vale*

$$3 \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 2\lambda + K_{\text{ext}}.$$

Demonstração: Suponha que $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ é uma base ortonormal de M , com $\langle \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2 \rangle = (-1)^\nu$. Inicialmente, usando o item (i) do Lema 2.3.2 temos que

$$\begin{aligned} K_{\text{ext}} &= K_{\text{ext}}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \\ &= (-1)^\nu (\langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1), \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) \rangle - \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \rangle) \\ &= (-1)^\nu ((-1)^\nu \lambda - 3 \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \rangle) \\ &= \lambda - 3(-1)^\nu \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \rangle, \end{aligned}$$

e portanto

$$(-1)^\nu \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \rangle = \frac{\lambda - K_{\text{ext}}}{3}.$$

Notando que $2\mathbf{H} = \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) + (-1)^\nu \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2)$, vemos que $\langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \mathbf{H} \rangle = 0$ pelo item (ii) do Lema 2.3.2. Calculando os produtos restantes de Π com \mathbf{H} , temos:

$$\begin{aligned} \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1), \mathbf{H} \rangle &= \frac{\langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) \rangle + (-1)^\nu \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1), \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) \rangle}{2} \\ &= \frac{\lambda + (-1)^\nu ((-1)^\nu \lambda - 2 \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \rangle)}{2} \\ &= \lambda - (-1)^\nu \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \rangle \\ &= \frac{2\lambda + K_{\text{ext}}}{3}, \end{aligned}$$

¹³Formalmente, um tensor de tipo curvatura é quadrilinear, anti-simétrico nos dois primeiros e nos dois últimos argumentos, simétrico sob troca dos dois primeiros argumentos com os dois últimos, e satisfaz a identidade de Bianchi. Curiosidade: a penúltima condição dita agora é supérflua na definição e segue da identidade de Bianchi (este argumento é conhecido como “*octaedro de Milnor*”. Veja [3] para mais detalhes.

e de modo análogo

$$\begin{aligned}\langle \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2), \mathbf{H} \rangle &= \frac{\langle \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) \rangle + (-1)^\nu \langle \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) \rangle}{2} \\ &= (-1)^\nu \left(\frac{\langle \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2), \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) \rangle + (-1)^\nu \langle \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1), \Pi(\mathbf{E}_2, \mathbf{E}_2) \rangle}{2} \right) \\ &= (-1)^\nu \left(\frac{2\lambda + K_{\text{ext}}}{3} \right).\end{aligned}$$

Assim, por bilinearidade de Π e $\langle \cdot, \cdot \rangle$, segue que

$$\langle \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathbf{H} \rangle = \left(\frac{2\lambda + K_{\text{ext}}}{3} \right) \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle,$$

para todos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathfrak{X}(M)$, e concluímos que M é pseudo-umbílica. A expressão para $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$ segue diretamente disto. \square

Observação. Em [46], o resultado acima está enunciado e provado apenas para superfícies de tipo espaço em ambientes Lorentzianos, sendo a versão acima uma pequena generalização.

Teorema 2.3.4. *Sejam $(\overline{M}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície não-degenerada e marginalmente aprisionada em \overline{M} . São equivalentes:*

- (i) M é pseudo-umbílica;
- (ii) M é 0-isotrópica;
- (iii) M é isotrópica.

Demonstração: Inicialmente, note que M ser marginalmente aprisionada em \overline{M} juntamente com o fato de a codimensão de M ser 2 nos diz que a métrica induzida nos espaços normais à M é Lorentziana, de modo que \overline{M} Lorentziana implica M de tipo espaço, bem como \overline{M} ter índice 2 implica em M ser Lorentziana. Assim, vamos às implicações:

(i) \implies (ii): Dado $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ unitário, M ser pseudo-umbílica e marginalmente aprisionada nos diz que $\langle \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{X}), \mathbf{H} \rangle = 0$. Assim a observação acima nos diz que $\Pi(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ está no raio de luz determinado por \mathbf{H} , donde M é 0-isotrópica.

(ii) \implies (iii): trivial.

(iii) \implies (i): É o Lema 2.3.3. \square

2.3.2 Isotropia e umbilicidade

Teorema 2.3.5. *Sejam $(\overline{M}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Lorentziana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície de tipo espaço e λ -isotrópica. Então:*

- (i) se $p \in M$ não é umbílico, então $\lambda(p) = \langle \mathbf{H}(p), \mathbf{H}(p) \rangle = K_{\text{ext}}(p) = 0$;
- (ii) a função de isotropia é $\lambda = \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = K_{\text{ext}}$;
- (iii) dados $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(M)$ quaisquer, vale a relação $\langle \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \Pi(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) \rangle = \lambda \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle$.

Demonstração:

- (i) Sendo $p \in M$ não-umbílico, podemos escolher uma base ortonormal (E_1, E_2) de $T_p M$ tal que $\Pi(E_1, E_2) \neq \mathbf{0}$. Claro que temos $\langle \Pi(E_i, E_i), \Pi(E_i, E_i) \rangle = \lambda(p)$. Suponha por absurdo que $\lambda(p) > 0$, sendo o caso $\lambda(p) < 0$ análogo. Nestas condições temos que $\Pi(E_1, E_1)$ é não-nulo e de tipo espaço, e assim o item (ii) do Lema 2.3.2 (p. 50) nos dá que $\langle \Pi(E_1, E_1), \Pi(E_1, E_2) \rangle = 0$, donde segue que $\Pi(E_1, E_2)$ é de tipo tempo.

Normalizando, obtemos uma base ortonormal (E_1, E_2, N_3, N_4) de $T_p \overline{M}$, com N_4 de tipo tempo, tal que

$$\Pi(E_1, E_1) = \sqrt{\lambda(p)} N_3 \quad \text{e} \quad \Pi(E_1, E_2) = \|\Pi(E_1, E_2)\| N_4.$$

Utilizando novamente o item (ii) do Lema 2.3.2, segue que $\langle \Pi(E_2, E_2), N_4 \rangle = 0$, donde por isotropia segue que $\Pi(E_2, E_2) = \pm \sqrt{\lambda(p)} N_3$. As duas possibilidades de sinal são problemáticas: com efeito, o item (i) do Lema 2.3.2 lê-se como

$$\pm \lambda(p) - 2\|\Pi(E_1, E_2)\|^2 = \lambda(p).$$

Se o sinal for positivo, então $\Pi(E_1, E_2) = \mathbf{0}$, absurdo. Se o sinal for negativo, então teremos $\lambda(p) = -\|\Pi(E_1, E_2)\|^2 < 0$, absurdo novamente.

Assim, concluímos que $\lambda(p) = 0$. Resta ver que $\langle H(p), H(p) \rangle = K_{\text{ext}}(p) = 0$. Tratamos duas situações:

- Se $\Pi(E_1, E_1) = \Pi(E_2, E_2) = \mathbf{0}$, então temos que $H(p) = 0$, e segue do Lema 2.3.3 (p. 51) que $K_{\text{ext}}(p) = 0$.
 - Se $\Pi(E_1, E_1)$ ou $\Pi(E_2, E_2)$ for não-nulo, será de tipo luz. Digamos que seja $\Pi(E_1, E_1)$. Assim o item (ii) do Lema 2.3.2 nos diz que $\Pi(E_1, E_2)$ é ortogonal à $\Pi(E_1, E_1)$, cujo complemento ortogonal em $T_p M^\perp$ é um raio de luz. Assim $\Pi(E_1, E_2)$ também é de tipo luz, e segue da definição de curvatura extrínseca que $K_{\text{ext}}(p) = 0$. Desta vez o Lema 2.3.3 nos dá que $\langle H(p), H(p) \rangle = 0$.
- (ii) A igualdade vale em pontos não-umbílicos, pelo item (i) acima. Já se $p \in M$ é umbílico, a observação feita logo após a Definição 2.3.1 (p. 50) nos diz que $\lambda(p) = \langle H(p), H(p) \rangle$, e a igualdade disto com $K_{\text{ext}}(p)$ segue do Lema 2.3.3.
- (iii) Desta vez, a igualdade a ser verificada é tensorial e assim pode ser verificada pontualmente. Fixe $p \in M$ e defina $\tilde{F}: (T_p M)^4 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) &\doteq F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - F(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ &= \langle \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{z}), \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rangle - \langle \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{z}), \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \rangle - \lambda(p) (\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{z} \rangle \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle), \end{aligned}$$

onde F é a aplicação considerada na demonstração do Lema 2.3.2. Desta vez, pode-se verificar (com bastante paciência) que \tilde{F} é de fato um tensor de tipo curvatura. Utilizando que $\lambda(p) = K_{\text{ext}}(p)$ pelo item (ii) acima e mais a definição de curvatura extrínseca, segue facilmente que $\tilde{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ para todos os vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$ tais que o determinante de Gram $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle^2$ não se anule¹⁴. É um fato geral sobre tensores de tipo curvatura que esta condição é suficiente para que $\tilde{F} = 0$ (veja [18]). Em outras palavras, F é invariante pela troca do primeiro com o terceiro argumento.

Agora afirmo que $F = 0$. Com efeito, indicando as transposições utilizadas em cada passo temos

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \stackrel{(13)}{=} F(\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{(12)}{=} F(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \stackrel{(13)}{=} F(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \stackrel{(12)}{=} F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}),$$

¹⁴Como $\dim M = 2$, na verdade isto valerá sempre que \mathbf{u} e \mathbf{v} forem linearmente independentes.

de modo que a identidade de Bianchi para F lê-se finalmente como $3F(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = 0$.

□

Observação. A demonstração acima não se adapta imediatamente para superfícies Lorentzianas em ambientes com índice 2. No item (i), no caso em que o sinal a ser analisado é positivo, obteríamos $\lambda(p) = \|\Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)\|^2$, e não há contradições aparentes. Este detalhe compromete os argumentos dados para (ii) e (iii).

Vamos resumir os resultados obtidos até então em alguns corolários. Para tal, registramos a seguinte:

Definição 2.3.6. Sejam $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M \subseteq \overline{M}$ uma subvariedade não-degenerada. O primeiro espaço normal de M em um ponto $p \in M$ é

$$\text{Im}(\Pi)_p \doteq \text{span}\{\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T}_p M\}.$$

Observação. Note que se a dimensão de $\text{Im}(\Pi)_p$ é constante ao longo de M , então $\text{Im}(\Pi)$ é um subfibrado vetorial de $\mathbb{T}M^\perp$.

Assim, temos:

Corolário 2.3.7. Sejam $(\overline{M}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Lorentziana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície isotrópica e de tipo espaço. São equivalentes:

- (i) M é 0-isotrópica.
- (ii) $\langle \Pi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \Pi(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) \rangle = 0$ para quaisquer $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} \in \mathfrak{X}(M)$.
- (iii) M é w -marginalmente aprisionada.
- (iv) M não possui curvatura extrínseca, ou seja, $K_{\text{ext}} = 0$.
- (v) O primeiro espaço normal $\text{Im}(\Pi)$ é um raio de luz, para cada ponto não-plano de M .

Corolário 2.3.8. Sejam $(\overline{M}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Lorentziana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície isotrópica e de tipo espaço, livre de pontos umbílicos. Então M é 0-isotrópica e w -marginalmente aprisionada.

Corolário 2.3.9. Sejam $(\overline{M}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Lorentziana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície de tipo espaço λ -isotrópica, com λ constante, e que não seja totalmente umbílica. Então M é 0-isotrópica e w -marginalmente aprisionada.

Demonstração: É essencialmente um argumento padrão de continuidade. Ponha

$$U \doteq \{p \in M \mid \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq \mathbf{0} \text{ para algum par de vetores ortonormais } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T}_p M\}.$$

Note que U é precisamente o conjunto dos pontos não-umbílicos de M . Temos que $U \neq \emptyset$ por hipótese, e que U é aberto. Pelo Teorema 2.3.5 (p. 52), temos $\lambda|_U = 0$. Por continuidade de λ segue que $\lambda|_{\overline{U}} = 0$, onde \overline{U} denota o fecho de U em M . Se U é denso em M , acabou.

Caso contrário, $M \setminus \overline{U}$ é uma subvariedade aberta de M , que é totalmente umbílica em M , e portanto $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$ -isotrópica, com $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle|_{M \setminus \overline{U}}$ constante, de modo que basta provar que $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$ se anula em pelo menos um ponto de $M \setminus \overline{U}$. Tome $p \in \partial U$, e uma sequência de pontos umbílicos $(p_k)_{k \geq 0}$ tal que $p_k \rightarrow p$. Por continuidade $\langle \mathbf{H}(p_k), \mathbf{H}(p_k) \rangle \rightarrow \langle \mathbf{H}(p), \mathbf{H}(p) \rangle = \lambda(p) = 0$. Mas como a sequência numérica $(\langle \mathbf{H}(p_k), \mathbf{H}(p_k) \rangle)_{k \geq 0}$ é constante e converge para zero, devemos ter $\langle \mathbf{H}(p_k), \mathbf{H}(p_k) \rangle = 0$ para todo $k \geq 0$, concluindo o argumento. □

Uma pequena adaptação no argumento nos permite trocar a hipótese de λ ser constante, pela curvatura seccional de \bar{M} o ser, lembrando da observação feita logo após a Definição 2.3.1 (p. 50). Mais precisamente, temos o:

Corolário 2.3.10. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{M}_1^4(c)$ uma superfície de tipo espaço, λ -isotrópica, e que não seja totalmente umbílica. Então M é 0-isotrópica e w -marginamente aprisionada.*

2.3.3 Rigidez de subvariedades 0-isotrópicas $M^n \subseteq \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$

Neste ponto, buscamos classificar as subvariedades 0-isotrópicas de codimensão dois em formas espaciais pseudo-Riemannianas. Para tanto, além dos teoremas da Seção 2.2, também precisamos de uma definição e mais dois resultados técnicos, cujas demonstrações podem ser consultadas em [18]:

Definição 2.3.11. *Sejam (\tilde{M}, \tilde{g}) e (M, g) variedades pseudo-Riemannianas. Uma aplicação suave $p: \tilde{M} \rightarrow M$ é dita um recobrimento pseudo-Riemanniano se p é simultaneamente uma aplicação de recobrimento e uma isometria local.*

Proposição 2.3.12. *Sejam (\tilde{M}, \tilde{g}) e (M, g) variedades pseudo-Riemannianas, e $p: \tilde{M} \rightarrow M$ um recobrimento pseudo-Riemanniano. Se \tilde{M} é conexa e M é simplesmente conexa, então p é uma isometria.*

Proposição 2.3.13. *Sejam (\tilde{M}, \tilde{g}) e (M, g) variedades pseudo-Riemannianas, e $p: \tilde{M} \rightarrow M$ uma isometria local. Suponha que M é conexa. Então \tilde{M} é completa se e somente se M também é completa e p é um recobrimento pseudo-Riemanniano.*

Teorema 2.3.14. *Seja $M^n \subseteq \mathbb{R}_v^{n+2}$ uma subvariedade não-degenerada, completa, simplesmente conexa, 0-isotrópica e livre de pontos planos. Então:*

- (i) M é isométrica a \mathbb{R}_{v-1}^n ;
- (ii) M é congruente a imagem de uma aplicação $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_v^{n+2}$ dada por

$$x(\mathbf{u}) = (\tau(\mathbf{u}), \mathbf{u}, \tau(\mathbf{u})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{v-1}^n \times \mathbb{R}_1,$$

onde $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, cujo vetor curvatura média é dado por

$$H \circ x = \frac{\Delta \tau}{n} (1, \mathbf{0}, 1).$$

Em particular, M é w -marginamente aprisionada.

Demonstração: Sendo M simplesmente conexa, 0-isotrópica e livre de pontos planos, o Teorema 2.2.4 (p. 47) nos fornece $L_0 \in \mathbb{R}_v^{n+2}$ de tipo luz tal que $M \subseteq L_0^\perp$. Assim, considere uma transformação pseudo-ortogonal $\Lambda \in O_v(n+2, \mathbb{R})$ levando L_0 no vetor $(1, \mathbf{0}, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{v-1}^n \times \mathbb{R}_1$ e, portanto, L_0^\perp no hiperplano $x^1 = x^{n+2}$. Considere $\pi: \mathbb{R}_v^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}_{v-1}^n$ a projeção nas coordenadas centrais. Temos que $\pi \circ \Lambda: M \rightarrow \mathbb{R}_{v-1}^n$ é uma isometria local. Sendo M completa, a Proposição 2.3.13 nos diz que $\pi \circ \Lambda$ é um recobrimento pseudo-Riemanniano. Pela Proposição 2.3.12, $\pi \circ \Lambda$ é uma isometria.

Assim, a imagem de M via $\pi \circ \Lambda$ é levada dentro do hiperplano $x^1 = x^{n+2}$, e obtemos uma função $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que M é congruente à imagem de $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_v^{n+2}$ dada por $x(\mathbf{u}) = (\tau(\mathbf{u}), \mathbf{u}, \tau(\mathbf{u}))$, como desejado. O cálculo do vetor curvatura média é análogo ao feito Exemplo 2.1.2 (p. 36) para $v = 1$. \square

Do Teoremas 2.3.4 (p. 52), obtemos então dois corolários:

Corolário 2.3.15. *Uma superfície $M^2 \subseteq \mathbb{R}_v^4$ ($v = 1$ ou 2) não-degenerada é isotrópica e marginamente aprisionada se e somente se é congruente à imagem de uma aplicação $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ da forma $x(u, v) = (\tau(u, v), u, v, \tau(u, v))$, onde $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ é tal que $\Delta \tau$ nunca se anule.*

Corolário 2.3.16. *Uma superfície $M^2 \subseteq \mathbb{R}_v^4$ ($v = 1$ ou 2) não-degenerada é pseudo-umbílica e marginalmente aprisionada se e somente se é congruente à imagem de uma aplicação $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_v^4$ da forma $x(u, v) = (\tau(u, v), u, v, \tau(u, v))$, onde $\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ é tal que $\Delta\tau$ nunca se anule.*

Para concluir o capítulo, vamos buscar as versões correspondentes dos resultados acima para os ambientes S_v^{n+2} e \mathbb{H}_v^{n+2} . Felizmente, o argumento a ser dado é essencialmente o mesmo:

Teorema 2.3.17. *Fixe $c \in \{-1, 1\}$. Seja $M^n \subseteq \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ uma subvariedade não-degenerada, completa, simplesmente conexa, 0-isotrópica e livre de pontos planos. Então:*

- (i) M é isométrica a $\mathbb{M}_{v-1}^n(c)$;
- (ii) M é congruente a imagem de uma aplicação $x: \mathbb{M}_{v-1}^n(c) \rightarrow \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ dada por

$$x(\mathbf{u}) = (\tau(\mathbf{u}), \mathbf{u}, \tau(\mathbf{u})) \in \mathbb{R} \times \mathbb{M}_{v-1}^n(c) \times \mathbb{R}_1,$$

onde $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}_{v-1}^n(c))$, cujo vetor curvatura média é dado por

$$\mathbf{H} \circ x = \frac{\Delta\tau + n\mathbf{c}\tau}{n}(1, \mathbf{0}, 1).$$

Em particular, M é w -marginalmente aprisionada.

Demonstração: Sendo M simplesmente conexa, 0-isotrópica e livre de pontos planos, o Teorema 2.2.4 (p. 47) nos fornece $L_0 \in \mathbb{R}_v^{n+3}$ ou \mathbb{R}_{v+1}^{n+3} de tipo luz tal que $M \subseteq L_0^\perp \cap \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$. Assim, considere uma isometria Λ de $\mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ (vista como um elemento de $O_v(n+3, \mathbb{R})$ ou $O_{v+1}(n+3, \mathbb{R})$) levando L_0 no vetor $(1, \mathbf{0}, 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{v-1}^n \times \mathbb{R}_1$ (ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_v^n \times \mathbb{R}_1$) e, portanto, L_0^\perp no hiperplano $x^1 = x^{n+2}$ (ou $x^1 = x^{n+3}$). Considere $\pi: \mathbb{R}_v^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}_{v-1}^n$ (ou \mathbb{R}_v^n) a projeção nas coordenadas centrais. Temos que $\pi \circ \Lambda: M \rightarrow \mathbb{M}_{v-1}^n(c)$ é uma isometria local. Sendo M completa, a Proposição 2.3.13 nos diz que $\pi \circ \Lambda$ é um recobrimento pseudo-Riemanniano. Pela Proposição 2.3.12, $\pi \circ \Lambda$ é uma isometria.

Assim, a imagem de M via $\pi \circ \Lambda$ é levada dentro do hiperplano $x^1 = x^{n+2}$ (ou $x^1 = x^{n+3}$), e obtemos uma função $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}_{v-1}^n(c))$ tal que M é congruente à imagem de $x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_v^{n+2}(c)$ dada por $x(\mathbf{u}) = (\tau(\mathbf{u}), \mathbf{u}, \tau(\mathbf{u}))$, como desejado. \square

Observação.

- Note no resultado acima que quando o ambiente é o espaço de de Sitter S_v^4 , M acaba por ser compacta.
- Como na Seção 2.2, enunciamos os teoremas 2.3.14 e 2.3.17 separadamente apenas por motivos didáticos.

Corolário 2.3.18. *Fixe $c \in \{-1, 1\}$. Uma superfície $M^2 \subseteq \mathbb{M}_v^4(c)$ ($v = 1$ ou 2) não-degenerada é isotrópica e marginalmente aprisionada se e somente se é congruente à imagem de uma aplicação $x: \mathbb{M}_{v-1}^2(c) \rightarrow \mathbb{M}_v^4(c)$ da forma $x(u, v, w) = (\tau(u, v, w), u, v, w, \tau(u, v, w))$, onde $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}_{v-1}^2(c))$ é tal que $\Delta\tau + 2\mathbf{c}\tau$ nunca se anule.*

Corolário 2.3.19. *Fixe $c \in \{-1, 1\}$. Uma superfície $M^2 \subseteq \mathbb{M}_v^4(c)$ ($v = 1$ ou 2) não-degenerada é pseudo-umbílica e marginalmente aprisionada se e somente se é congruente à imagem de uma aplicação $x: \mathbb{M}_{v-1}^2(c) \rightarrow \mathbb{M}_v^4(c)$ da forma $x(u, v, w) = (\tau(u, v, w), u, v, w, \tau(u, v, w))$, onde $\tau \in C^\infty(\mathbb{M}_{v-1}^2(c))$ é tal que $\Delta\tau + 2\mathbf{c}\tau$ nunca se anule.*

Capítulo 3

Superfícies marginalmente aprisionadas com nulidade relativa positiva em $\mathbb{M}_1^4(c)$

Neste capítulo, seguiremos Chen e Van der Veken em [40], a fim de obtermos uma classificação das superfícies marginalmente aprisionadas nas formas espaciais $\mathbb{M}_1^4(c)$, com a propriedade de que sua Segunda Forma Fundamental II seja uma aplicação bilinear degenerada. Neste contexto, o seu radical recebe o nome de *espaço de nulidade relativa*. Iniciamos a Seção 3.1 recordando brevemente o formalismo e a linguagem de formas diferenciais, utilizadas para estabelecer propriedades básicas de um referencial naturalmente construído em superfícies com nulidade relativa positiva. Na Seção 3.2, estabelecemos a classificação de tais superfícies em \mathbb{L}^4 , enquanto na Seção 3.3 tratamos a mesma situação nos espaços de de Sitter e anti-de Sitter S_1^4 e \mathbb{H}_1^4 simultaneamente.

3.1 Espaços de nulidade relativa

3.1.1 Equações de estrutura

Se $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade pseudo-Riemanniana, pode-se representar a sua conexão de Levi-Civita ∇ , bem como a sua curvatura R , por meio de certas formas diferenciais¹.

Definição 3.1.1. Sejam $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $\mathcal{F} = (E_1, \dots, E_n)$ um referencial local tangente à M .

- (i) As 1-formas de conexão de M relativas ao referencial \mathcal{F} são os coeficientes $\omega_j^i \in \Omega^1(M)$ definidos pela igualdade

$$\nabla_X E_j = \sum_{i=1}^n \omega_j^i(X) E_i,$$

onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo qualquer.

- (ii) As 2-formas de curvatura de M relativas ao referencial \mathcal{F} são os coeficientes $\Omega_j^i \in \Omega^2(M)$ definidos pela igualdade

$$R(X, Y)E_j = \sum_{i=1}^n \Omega_j^i(X, Y) E_i,$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ são campos quaisquer.

Observação. Se $g_{ij} \doteq \langle E_i, E_j \rangle$, para $1 \leq i, j \leq n$, denotam os coeficientes de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ relativos à \mathcal{F} , e

¹Tal estratégia acaba por ser equivalente ao uso dos Símbolos de Christoffel, introduzidos na Proposição 1.2.16 (p. 25).

$(g^{ij})_{i,j=1}^n$ denotam os coeficientes inversos, imediatamente temos que

$$\omega_j^i(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n g^{ik} \langle \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k \rangle \quad \text{e} \quad \Omega_j^i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^n g^{ik} R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{E}_j, \mathbf{E}_k).$$

Além disto, o fato de ∇ paralelizar a métrica traduz-se na relação $dg_{ij} = \sum_{k=1}^n g_{ik} \omega_j^k + g_{jk} \omega_i^k$, para quaisquer possibilidades de índices. Em particular, se \mathcal{F} é ortonormal e ϵ_i abrevia o indicador de \mathbf{E}_i , valem as simetrias $\omega_j^i = -\epsilon_i \epsilon_j \omega_j^i$ e $\Omega_j^i = -\epsilon_i \epsilon_j \Omega_j^i$ (e logo $\omega_i^i = \Omega_i^i = 0$).

Tais formas estão relacionadas pelo:

Lema 3.1.2 (Equações de estrutura). *Sejam $(M^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $\mathcal{F} = (\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n)$ um referencial local tangente à M . Sendo $(\theta^1, \dots, \theta^n) \subseteq \Omega^1(M)$ o co-referencial de \mathcal{F} , formado pelas 1-formas duais² aos campos de \mathcal{F} , temos:*

(i) $d\theta^i = \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \omega_j^i$ - primeiras equações de estrutura;

(ii) $\Omega_j^i = d\omega_j^i + \sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k$ - segundas equações de estrutura.

Demonstração: Recordamos³ que se $\omega \in \Omega^1(M)$, sua derivada exterior $d\omega \in \Omega^2(M)$ fica caracterizada pela expressão

$$d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}(\omega(\mathbf{Y})) - \mathbf{Y}(\omega(\mathbf{X})) - \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]).$$

(i) Aplicando $\nabla_{\mathbf{X}}$ nos dois lados de $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^n \theta^j(\mathbf{Y}) \mathbf{E}_j$, obtemos

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \sum_{k=1}^n \left(\mathbf{X}(\theta^k(\mathbf{Y})) + \sum_{j=1}^n \theta^j(\mathbf{Y}) \omega_j^k(\mathbf{X}) \right) \mathbf{E}_k,$$

donde aplicar θ^i nos dá

$$\mathbf{X}(\theta^i(\mathbf{Y})) = \theta^i(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) - \sum_{j=1}^n \omega_j^i(\mathbf{X}) \theta^j(\mathbf{Y}).$$

Usando a caracterização recordada acima para $d\theta^i$ juntamente com o fato de ∇ possuir torção nula, temos

$$\begin{aligned} d\theta^i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \theta^i(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) - \sum_{j=1}^n \omega_j^i(\mathbf{X}) \theta^j(\mathbf{Y}) - \theta^i(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) + \sum_{j=1}^n \omega_j^i(\mathbf{Y}) \theta^j(\mathbf{X}) - \theta^i([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]) \\ &= \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \omega_j^i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

como desejado.

²Ou seja, $\theta^i(\mathbf{E}_j) = \delta_j^i$.

³Nossa convenção de normalização para o produto exterior é $\omega \wedge \theta = \frac{(k+\ell)!}{k!\ell!} \text{Alt}(\omega \otimes \theta)$, para quaisquer $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\theta \in \Omega^\ell(M)$, onde $\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) T^\sigma$ é o alternador de $T \in \mathfrak{T}_k^0(M)$.

(ii) Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, basta calcular

$$\begin{aligned}
R(X, Y)E_j &= \nabla_X \nabla_Y E_j - \nabla_Y \nabla_X E_j - \nabla_{[X, Y]} E_j \\
&= \nabla_X \left(\sum_{k=1}^n \omega_j^k(Y) E_k \right) - \nabla_Y \left(\sum_{k=1}^n \omega_j^k(X) E_k \right) - \sum_{i=1}^n \omega_j^i([X, Y]) E_i \\
&= \sum_{i=1}^n X(\omega_j^i(Y)) E_i + \sum_{k=1}^n \omega_j^k(Y) \nabla_X E_k - \sum_{i=1}^n Y(\omega_j^i(X)) E_i - \sum_{k=1}^n \omega_j^k(X) \nabla_Y E_k - \sum_{i=1}^n \omega_j^i([X, Y]) E_i \\
&= \sum_{i=1}^n d\omega_j^i(X, Y) E_i + \sum_{i, k=1}^n \omega_j^k(Y) \omega_k^i(X) E_i - \sum_{i, k=1}^n \omega_j^k(X) \omega_k^i(Y) E_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(d\omega_j^i(X, Y) + \sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k(X, Y) \right) E_i,
\end{aligned}$$

como queríamos. □

3.1.2 Definição e propriedades básicas

Definição 3.1.3. Sejam $(\bar{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M \subseteq \bar{M}$ uma subvariedade não-degenerada de \bar{M} . O *espaço de nulidade relativa* de M em um ponto p é definido por

$$\text{nul}_p M \doteq \{v \in T_p M \mid \Pi(v, w) = \mathbf{0}, \text{ para todo } w \in T_p M\}.$$

A dimensão de $\text{nul}_p M$ é chamada o *índice de nulidade relativa de M em p* , e M é dita possuir *nulidade relativa positiva* se possui índice de nulidade relativa positivo em todos pontos.

Observação.

- $\text{nul}_p M = \{v \in T_p M \mid A_\xi(v) = \mathbf{0}, \text{ para todo } \xi \in (T_p M)^\perp\}$;
- Se M é totalmente geodésica (isto é, $\Pi = \mathbf{0}$), então $\text{nul}_p M = T_p M$, para todo $p \in M$.
- É conveniente chamarmos $\text{nul } M \doteq \bigsqcup_{p \in M} \text{nul}_p M$, e denotarmos por $\Gamma(\text{nul } M)$ o espaço dos campos tangentes à M que assumem valores apenas em $\text{nul } M$.
- Pode-se provar que se \bar{M} é uma forma espacial, então o conjunto G dos pontos de M em que o índice de nulidade relativa é mínimo e constante é um aberto de M , a distribuição $\text{nul } M|_G$ é suave e involutiva, e a folheação obtida é totalmente geodésica em M . Para mais detalhes, veja [32].
- Se $M^2 \subseteq \bar{M}^4$ possui nulidade relativa positiva e é marginalmente aprisionada, necessariamente o índice de nulidade relativa é constante e igual a 1.

Exemplo 3.1.4. No Exemplo 2.1.4 (p. 37) vimos que se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, $f \in C^\infty(I)$, e $x: I \times I \rightarrow \mathbb{R}_2^4$ é dada por $x(u, v) \doteq (v, f(u), f(u), u)$, então a superfície $M \doteq x[I \times I]$ possui nulidade relativa positiva. Mais exatamente, pode-se mostrar que sua Segunda Forma Fundamental é dada por

$$\Pi = (0, f''(u), f''(u), 0) \otimes du \otimes du,$$

de modo que dado $(u, v) \in I \times I$, temos

$$\text{nul}_{x(u, v)} M = \left\{ \lambda \partial_v \Big|_{x(u, v)} \in T_{x(u, v)} M \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como uma consequência do Corolário 1.2.25 (p. 30), temos o:

Corolário 3.1.5. *Sejam $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e $M \subseteq \overline{M}$ uma subvariedade não-degenerada de \overline{M} com nulidade relativa positiva. Se $X \in \Gamma(\text{nul}M)$, então $K_{\text{ext}}(X, Y) = 0$ para todo campo Y linearmente independente com X . Em particular, se $M^2 \subseteq \mathbb{M}_V^n(c)$, temos que a curvatura Gaussiana de M é constante e igual à c .*

Lema 3.1.6. *Sejam $(\overline{M}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Lorentziana e $M^2 \subseteq \overline{M}$ uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada em \overline{M} , e com nulidade relativa positiva. Dado $p \in M$, existem uma base ortonormal (E_1, E_2) de T_pM e uma base de Penrose (-1) -normalizada (L_+, L_-) de T_pM^\perp , satisfazendo*

$$\text{II}(E_1, E_1) = L_+ \quad e \quad \text{II}(E_1, E_2) = \text{II}(E_2, E_2) = 0.$$

Demonstração: Note que M é de tipo espaço, pois é marginalmente aprisionada em \overline{M} . Como M possui índice de nulidade relativa positivo em p , tomamos $E_2 \in \text{nul}_pM$ unitário, e $E_1 \in T_pM$ unitário e ortogonal à E_2 . Neste ponto, vale automaticamente que $\text{II}(E_1, E_2) = \text{II}(E_2, E_2) = 0$. Usando novamente que M é marginalmente aprisionada em \overline{M} , temos que $L_+ \doteq 2H(p) = \text{II}(E_1, E_1) \neq 0$ é de tipo luz.

Por fim, sendo \overline{M} Lorentziana, cada espaço normal T_pM^\perp contém apenas dois raios de luz, de modo que L_- fica unicamente determinado pelas condições $\langle L_-, L_- \rangle = 0$ e $\langle L_+, L_- \rangle = -1$. \square

Observação.

- Em [40], este resultado está enunciado apenas quando $\overline{M} = \mathbb{M}_1^4(c)$. Na verdade, é fácil ver que a mesma conclusão vale também quando a métrica de \overline{M} possui índice 2 e M é Lorentziana, contanto que nul_pM não seja um raio de luz. Se nul_pM é um raio de luz, então M não pode ser marginalmente aprisionada. Com efeito, conseguimos dois vetores de tipo luz $L_1, L_2 \in T_pM$ com $\langle L_1, L_2 \rangle = 1$ e $H = \text{II}(L_1, L_2) = \text{II}(L_2, L_2) = 0$.
- Nas condições acima, aplicar os teoremas 2.2.4 (p. 47) e 2.2.5 (p. 48) nos diz que se $\overline{M} = \mathbb{M}_1^4(c)$, então M está contida em um hiperplano de tipo luz, possui fibrado normal plano e (novamente) curvatura Gaussiana constante e igual a c .

Assim, se $M^2 \subseteq \mathbb{M}_1^4(c)$ é uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada e com nulidade relativa positiva, considere um referencial local (E_1, E_2, L_+, L_-) de $\mathbb{M}_1^4(c)$, adaptado à M , nas condições do Lema 3.1.6 acima. Notando que

$$\langle \nabla_X^\perp L_\pm, L_\pm \rangle = 0 \quad e \quad \langle \nabla_X^\perp L_+, L_- \rangle = -\langle \nabla_X^\perp L_-, L_+ \rangle$$

qualquer que seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, concluímos que existe uma 1-forma ϕ definida no mesmo domínio do referencial tal que

$$\nabla_X E_1 = \omega_1^2(X)E_2, \quad \nabla_X E_2 = \omega_2^1(X)E_1, \quad \nabla_X^\perp L_+ = \phi(X)L_+ \quad e \quad \nabla_X^\perp L_- = -\phi(X)L_-.$$

Observação. Naturalmente, as definições de 1-formas de conexão e 2-formas de curvatura fazem sentido para conexões de Koszul em fibrados vetoriais quaisquer. Nas condições acima, pode-se verificar que $R^\perp(X, Y)L_\pm = \pm d\phi(X, Y)L_\pm$, ou seja, $d\phi$ é essencialmente a 2-forma de curvatura da conexão ∇^\perp em M . Como $R^\perp = 0$, temos que ϕ é fechada.

Lema 3.1.7 (Caracterizando ω_1^2). *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{M}_1^4(c)$ uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada e com nulidade relativa positiva. Sendo (E_1, E_2, L_+, L_-) o referencial dado pelo Lema 3.1.6, valem que*

$$\omega_1^2(E_1) = \phi(E_2) \quad e \quad \omega_1^2(E_2) = 0.$$

Demonstração: Utilizaremos as equações de Codazzi-Mainardi (Proposição 1.2.33, p. 33). Neste ponto é essencial trabalharmos com $\mathbb{M}_1^4(c)$ ao invés de um ambiente Lorentziano \overline{M} qualquer,

uma vez que será necessário o uso explícito de \bar{R} . Fixe $1 \leq i, j, k \leq 2$. Recordando que

$$\bar{R}(X, Y)Z = c(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_1^4(c))$, temos $\bar{R}(E_i, E_j, E_k, L_\pm) = 0$. Escrevendo ainda de forma reduzida $\Pi(E_i, E_j) = \delta_{i1}\delta_{j1}L_+$, temos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}\Pi(E_j, E_k; E_i) &= \nabla_{E_i}^\perp \Pi(E_j, E_k) - \Pi(\nabla_{E_i} E_j, E_k) - \Pi(E_j, \nabla_{E_i} E_k) \\ &= \delta_{j1}\delta_{k1}\nabla_{E_i}^\perp L_+ - \Pi(\omega_j^1(E_i)E_1 + \omega_j^2(E_i)E_2, E_k) - \Pi(E_j, \omega_k^1(E_i)E_1 + \omega_k^2(E_i)E_2) \\ &= \delta_{j1}\delta_{k1}\phi(E_i)L_+ - \omega_j^1(E_i)\Pi(E_1, E_k) - \omega_k^1(E_i)\Pi(E_j, E_1) \\ &= (\delta_{j1}\delta_{k1}\phi(E_i) - \omega_j^1(E_i)\delta_{k1} - \omega_k^1(E_i)\delta_{j1})L_+. \end{aligned}$$

Trocando índices, também temos

$$\bar{\nabla}\Pi(E_i, E_k; E_j) = (\delta_{i1}\delta_{k1}\phi(E_j) - \omega_i^1(E_j)\delta_{k1} - \omega_k^1(E_j)\delta_{i1})L_+,$$

de modo que a equação de Codazzi-Mainardi

$$\bar{R}(E_i, E_j, E_k, L_-) = \langle \bar{\nabla}\Pi(E_j, E_k; E_i) - \bar{\nabla}\Pi(E_i, E_k; E_j), L_- \rangle$$

lê-se apenas como

$$\delta_{j1}\delta_{k1}\phi(E_i) - \omega_j^1(E_i)\delta_{k1} - \omega_k^1(E_i)\delta_{j1} = \delta_{i1}\delta_{k1}\phi(E_j) - \omega_i^1(E_j)\delta_{k1} - \omega_k^1(E_j)\delta_{i1}.$$

Agora que o trabalho duro está feito, podemos escolher índices e realizar uma boa⁴ colheita. Escolhendo $(i, j, k) = (1, 2, 1)$ obtemos $\omega_1^2(E_1) = \phi(E_2)$, enquanto $(i, j, k) = (1, 2, 2)$ nos dá $\omega_1^2(E_2) = 0$. Todas as outras escolhas possíveis de índices nos levam à estas duas conclusões ou à tautologias. \square

Com os lemas obtidos até agora, podemos construir um sistema de coordenadas que capture a geometria de M de forma conveniente para obtermos as classificações desejadas nas próximas seções:

Proposição 3.1.8. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{M}_1^4(c)$ uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada e com nulidade relativa positiva. Sendo (E_1, E_2, L_+, L_-) o referencial dado pelo Lema 3.1.6, existe uma carta $(U, (u, v)) \in \Sigma(M)$ para a qual*

(i) a métrica de $\mathbb{M}_1^4(c)$ induzida em M se expressa como $e^{2\lambda}du^2 + dv^2$, onde $\lambda \in C^\infty(U)$ é suave;

(ii) $\partial_u = e^\lambda E_1$ e $\partial_v = E_2$;

(iii) A função λ satisfaz a relação $(e^\lambda)_{vv} + ce^\lambda = 0$;

(iv) $\bar{\nabla}_{\partial_u} L_+ = e^\lambda \phi(E_1)L_+$ e $\bar{\nabla}_{\partial_v} L_+ = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} L_+$.

Demonstração: Observamos anteriormente que ϕ é uma 1-forma fechada. Pelo Lema de Poin-

⁴Ou não tão boa assim...

caré, existe um potencial local λ tal que $-\phi = d\lambda$. Deste modo, temos

$$\begin{aligned} [e^\lambda E_1, E_2] &= \nabla_{e^\lambda E_1} E_2 - \nabla_{E_2} (e^\lambda E_1) \\ &= e^\lambda \nabla_{E_1} E_2 - E_2 (e^\lambda) E_1 - e^\lambda \nabla_{E_2} E_1 \\ &= -e^\lambda \phi(E_2) E_1 - e^\lambda d\lambda(E_2) E_1 \\ &= -e^\lambda \phi(E_2) E_1 + e^\lambda \phi(E_2) E_1 \\ &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

e assim (reduzindo o domínio U de λ se necessário) os itens (i) e (ii) seguem do Teorema de Frobenius⁵.

Em (iii), recordamos que a curvatura Gaussiana de M é constante e igual a c , de modo que

$$c = -\frac{(e^\lambda)_{vv}}{e^\lambda} \implies (e^\lambda)_{vv} + ce^\lambda = 0.$$

Finalmente, para o item (iv), note que $\langle A_{L_+}(X), Y \rangle = \langle \Pi(X, Y), L_+ \rangle = 0$, quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que $A_{L_+} = 0$. Com isto, temos

$$\bar{\nabla}_{\partial_u} L_+ = \nabla_{e^\lambda E_1}^\perp L_+ = e^\lambda \nabla_{E_1}^\perp L_+ = e^\lambda \phi(E_1) L_+$$

e também

$$\bar{\nabla}_{\partial_v} L_+ = \nabla_{\partial_v}^\perp L_+ = \phi(\partial_v) L_+ = -d\lambda(\partial_v) L_+ = -\frac{\partial \lambda}{\partial v} L_+,$$

como desejado. \square

Observação. A parametrização do resultado acima pode ser construída explicitamente, utilizando a *aplicação exponencial*: suponha que α seja uma curva integral de E_1 , definida em um pequeno intervalo contendo a origem 0. Definindo $x(u, v) \doteq \exp_{\alpha(u)}(vE_2(\alpha(u)))$, o fato de $\nabla_{E_2} E_2$ se anular garante que as curvas integrais de E_2 são geodésicas com velocidade unitária que cruzam α ortogonalmente. Como o mesmo vale para ∂_v , temos que $E_2 = \partial_v$, no domínio de x . Além disto, como o versor de ∂_u é ortogonal à E_2 , deve ser igual à $\pm E_1$, sendo que avaliação ao longo de α nos dá a igualdade com o sinal positivo.

3.2 A classificação em \mathbb{L}^4

Teorema 3.2.1. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada e com nulidade relativa positiva. Então M é localmente congruente a um aberto de uma superfície da forma*

(i) $x(u, v) = (f(u), v, u, f(u))$, onde f é uma função suave qualquer tal que f'' nunca se anule, ou;

$$(ii) \ x(u, v) = \begin{pmatrix} v\zeta(u) + \int_0^u r(t)\zeta'(t) dt \\ v \cos u - \int_0^u r(t) \sin t dt \\ v \sin u + \int_0^u r(t) \cos t dt \\ v\zeta(u) + \int_0^u r(t)\zeta'(t) dt \end{pmatrix}, \text{ onde } r \text{ e } \zeta \text{ são funções suaves definidas em um intervalo}$$

contendo a origem, com $\zeta'' + \zeta \neq 0$.

Demonstração: Que as superfícies listadas acima são marginalmente aprisionadas e com nulidade relativa positiva segue de cálculos diretos, como os apresentados na Seção 2.1 do Capítulo

⁵Se M^n é uma variedade diferenciável e $\mathcal{F} = (X_1, \dots, X_n)$ é um referencial local em M , então \mathcal{F} é *holonômico* (ou seja, os X_i são os campos coordenados de uma carta) se e somente se $[X_i, X_j] = 0$ para todos os i e j . Veja [8] para uma demonstração deste resultado.

2. Seja $x: U \rightarrow x[U] \subseteq M$ a parametrização dada pela Proposição 3.1.8 (p. 61). Neste caso, $(e^\lambda)_{vv} = 0$ implica que $e^{\lambda(u,v)} = p(u)v + q(u)$, para certas funções p e q . Tratamos casos:

(a) Se p é identicamente nula e chamamos \tilde{u} uma primitiva de q , a métrica induzida M por \mathbb{L}^4 expressa-se em coordenadas como $d\tilde{u}^2 + dv^2$, de modo que

$$x_{\tilde{u}\tilde{u}} = L_+ \circ x \quad \text{e} \quad x_{\tilde{u}v} = x_{vv} = \mathbf{0}.$$

Integrando, obtemos $x(\tilde{u}, v) = vc_1 + A(\tilde{u})$, para certos $c_1 \in \mathbb{L}^4$ e uma função vetorial A . Claramente temos que $A''(\tilde{u}) = L_+(x(\tilde{u}, v))$. Além disto, dualizando $d\tilde{u} = q(u) du$ temos que $\partial_{\tilde{u}} = q(u)^{-1}\partial_u$, e assim o item (iv) da Proposição 3.1.8 nos dá

$$A'''(\tilde{u}) = \nabla_{\partial_{\tilde{u}}} L_+ = \frac{1}{q(u)} \nabla_{\partial_u} L_+ = \frac{e^{\lambda(u,v)}}{q(u)} \phi(E_1) L_+ = \phi(E_1) A''(\tilde{u}).$$

Em particular, temos que $\psi \doteq \phi(E_1)$ depende apenas de \tilde{u} (e reparametrizando se necessário, ainda podemos supor que 0 pertence ao domínio de ψ). Naturalmente, o próximo passo é considerar a equação diferencial $A'''(\tilde{u}) = \psi(\tilde{u})A''(\tilde{u})$, cuja solução é dada por

$$A(\tilde{u}) = \tilde{u}c_2 + f(\tilde{u})c_3 + c_4,$$

onde $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{L}^4$ e

$$f(\tilde{u}) = \int_0^{\tilde{u}} \int_0^{t_2} \exp\left(\int_0^{t_1} \psi(t) dt\right) dt_1 dt_2.$$

Portanto, temos que a parametrização x toma a forma

$$x(\tilde{u}, v) = vc_1 + \tilde{u}c_2 + f(\tilde{u})c_3 + c_4.$$

Resta caracterizarmos os parâmetros c_1, c_2, c_3 e c_4 , a menos de transformações de Poincaré. Observe que como o vetor curvatura média de M é sempre de tipo luz, a derivada segunda f'' nunca se anula. Substituindo

$$x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) = c_2 + f'(\tilde{u})c_3, \quad x_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, v) = f''(\tilde{u})c_3 \quad \text{e} \quad x_v(\tilde{u}, v) = c_1,$$

temos (em ordem):

$$\begin{cases} \langle x_{\tilde{u}\tilde{u}}, x_{\tilde{u}\tilde{u}} \rangle = 0 \\ \langle x_{\tilde{u}\tilde{u}}, x_{\tilde{u}} \rangle = 0 \\ \langle x_{\tilde{u}\tilde{u}}, x_v \rangle = 0 \\ \langle x_{\tilde{u}}, x_{\tilde{u}} \rangle = 1 \\ \langle x_{\tilde{u}}, x_v \rangle = 0 \\ \langle x_v, x_v \rangle = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \langle c_3, c_3 \rangle = 0 \\ \langle c_2, c_3 \rangle = 0 \\ \langle c_1, c_3 \rangle = 0 \\ \langle c_2, c_2 \rangle = 1 \\ \langle c_1, c_2 \rangle = 0 \\ \langle c_1, c_1 \rangle = 1, \end{cases}$$

de modo que pela Proposição 1.1.19 (p. 14), aplicando uma transformação de Poincaré, podemos supor que $c_1 = (0, 1, 0, 0)$, $c_2 = (0, 0, 1, 0)$, $c_3 = (1, 0, 0, 1)$ e $c_4 = \mathbf{0}$. Ou seja, renomeando $\tilde{u} \rightarrow u$, temos

$$x(u, v) = (f(u), v, u, f(u)),$$

como desejado.

(b) Se p nunca se anula, chame \tilde{u} uma primitiva de p , de modo que $d\tilde{u} = p(u) du$ e a métrica

induzida em M por \mathbb{L}^4 expressa-se como

$$\begin{aligned} (p(u)v + q(u))^2 du^2 + dv^2 &= (p(u)v + q(u))^2 \left(\frac{d\tilde{u}}{p(u)} \right)^2 + dv^2 \\ &= \left(v + \frac{q(u)}{p(u)} \right)^2 d\tilde{u}^2 + dv^2 \\ &= (v + r(\tilde{u}))^2 d\tilde{u}^2 + dv^2, \end{aligned}$$

onde usamos que p não se anula para aplicar o Teorema da Função Inversa e obter a aplicação suave $r(\tilde{u}) = q(u)/p(u)$. Reparametrizando se necessário, podemos supor que r está definida em um intervalo da reta contendo a origem 0. O próximo passo é usar esta expressão da métrica para obtermos as derivadas segundas de x , como no primeiro caso tratado. Calculando os Símbolos de Christoffel⁶ para as coordenadas (\tilde{u}, v) , temos

$$\Gamma_{\tilde{u}\tilde{u}}^{\tilde{u}} = \frac{r'(\tilde{u})}{v + r(\tilde{u})}, \quad \Gamma_{\tilde{u}\tilde{u}}^v = -(v + r(\tilde{u})) \quad \text{e} \quad \Gamma_{\tilde{u}v}^{\tilde{u}} = \frac{1}{v + r(\tilde{u})},$$

enquanto que os restantes se anulam. Além disto, dualizando $d\tilde{u} = p(u) du$, obtemos que $\partial_{\tilde{u}} = p(u)^{-1} \partial_u$, donde

$$\begin{aligned} \Pi(\partial_{\tilde{u}}, \partial_{\tilde{u}}) &= \frac{1}{p(u)^2} \Pi(\partial_u, \partial_u) = \frac{1}{p(u)^2} \Pi(e^{\lambda(u,v)} \mathbf{E}_1, e^{\lambda(u,v)} \mathbf{E}_1) \\ &= \frac{(e^{\lambda(u,v)})^2}{p(u)^2} \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) = \frac{(p(u)v + q(u))^2}{p(u)^2} \mathbf{L}_+ \\ &= (v + r(\tilde{u}))^2 \mathbf{L}_+. \end{aligned}$$

Juntando todas estas informações, finalmente temos

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, v) &= \frac{r'(\tilde{u})}{v + r(\tilde{u})} x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) - (v + r(\tilde{u})) x_v(\tilde{u}, v) + (v + r(\tilde{u}))^2 \mathbf{L}_+(x(\tilde{u}, v)), \\ x_{\tilde{u}v}(\tilde{u}, v) &= \frac{1}{v + r(\tilde{u})} x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) \quad \text{e} \quad x_{vv} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

De $x_{vv} = \mathbf{0}$, obtemos que $x(\tilde{u}, v) = v\mathbf{A}(\tilde{u}) + \mathbf{B}(\tilde{u}) + \mathbf{c}_1$, para certas funções vetoriais \mathbf{A} e \mathbf{B} , e uma constante de integração $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{L}^4$. Ainda, notando que a igualdade

$$\mathbf{A}'(\tilde{u}) = \frac{1}{v + r(\tilde{u})} (v\mathbf{A}'(\tilde{u}) + \mathbf{B}'(\tilde{u}))$$

deve valer para todo v num pequeno intervalo aberto, podemos colocar $v = 0$ e isolar

$$\mathbf{B}(\tilde{u}) = \int_0^{\tilde{u}} r(t) \mathbf{A}'(t) dt,$$

donde

$$x(\tilde{u}, v) = v\mathbf{A}(\tilde{u}) + \int_0^{\tilde{u}} r(t) \mathbf{A}'(t) dt + \mathbf{c}_1.$$

Utilizando esta expressão para obter $x_{\tilde{u}\tilde{u}}$ de duas maneiras diferentes, podemos isolar

$$\mathbf{L}_+(x(\tilde{u}, v)) = \frac{\mathbf{A}''(\tilde{u}) + \mathbf{A}(\tilde{u})}{v + r(\tilde{u})}.$$

⁶Por exemplo, usando a observação feita após a Proposição 1.2.16 (p. 25).

O resto da estratégia consiste em usar o item (iv) da Proposição 3.1.8 de forma conveniente, para encontrarmos uma equação diferencial para A que possa ser resolvida. Note que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}} L_+ &= \frac{1}{p(u)} \overline{\nabla}_{\partial_u} L_+ \\ &= \frac{e^{\lambda(u,v)}}{p(u)} \phi(E_1) L_+ \\ &= \phi(E_1)(v + r(\tilde{u})) L_+(x(\tilde{u}, v)) \\ &= \phi(E_1)(A''(\tilde{u}) + A(\tilde{u}))\end{aligned}$$

Com isto, multiplicando a expressão para $L_+(x(\tilde{u}, v))$ por $v + r(\tilde{u})$ e aplicando $\overline{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}}$, vemos que

$$\left(\frac{r'(\tilde{u})}{v + r(\tilde{u})} + \phi(E_1)(v + r(\tilde{u})) \right) (A''(\tilde{u}) + A(\tilde{u})) = A'''(\tilde{u}) + A'(\tilde{u}).$$

Afirmção. O coeficiente multiplicando $A''(\tilde{u}) + A(\tilde{u})$ na expressão acima não depende de v , ou seja, é da forma $\psi(\tilde{u})$ com ψ suave.

Justificativa: É um cálculo razoavelmente longo. Listamos os principais pontos:

- Como $\partial_{\tilde{u}} = p(u)^{-1} \partial_u$, $r(\tilde{u}) = q(u)/p(u)$ implica em $r'(\tilde{u}) = \frac{q'(u)p(u) - q(u)p'(u)}{p(u)^3}$.
- $\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{p'(u)v + q'(u)}{e^{\lambda(u,v)}}$.
- $\frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{p(u)}{e^{\lambda(u,v)}}$.
- $\phi(E_1) = \phi(e^{-\lambda} \partial_u) = \frac{-d\lambda(\partial_u)}{e^{\lambda(u,v)}} = -\frac{p'(u)v + q'(u)}{e^{2\lambda(u,v)}}$.

Juntando tudo, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r'(\tilde{u})}{v + r(\tilde{u})} + \phi(E_1)(v + r(\tilde{u})) \right) &= -\frac{r'(\tilde{u})}{(v + r(\tilde{u}))^2} + \left(v + \frac{q(u)}{p(u)} \right) \frac{\partial}{\partial v} (\phi(E_1)) + \phi(E_1) \\ &= \frac{p'(u)q(u) - p(u)q'(u)}{p(u)^3 \left(v + \frac{q(u)}{p(u)} \right)^2} - \frac{e^{\lambda(u,v)}}{p(u)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p'(u)v + q'(u)}{e^{2\lambda(u,v)}} \right) - \frac{p'(u)v + q'(u)}{e^{2\lambda(u,v)}} \\ &= \frac{p'(u)q(u) - p(u)q'(u)}{p(u)e^{2\lambda(u,v)}} - \frac{e^{\lambda(u,v)}}{p(u)} \frac{p'(u)e^{2\lambda(u,v)} - 2(p'(u)v + q'(u))e^{2\lambda(u,v)}(\partial\lambda/\partial v)}{e^{4\lambda(u,v)}} - \frac{p'(u)v + q'(u)}{e^{2\lambda(u,v)}} \\ &= \frac{1}{p(u)e^{2\lambda(u,v)}} \left(p'(u)q(u) - p(u)q'(u) - e^{\lambda(u,v)}p'(u) + 2e^{\lambda(u,v)}\frac{\partial\lambda}{\partial v}(p'(u)v + q'(u)) - p(u)p'(u)v - p(u)q'(u) \right) \\ &= \frac{1}{p(u)e^{2\lambda(u,v)}} (p'(u)q(u) - p(u)q'(u) - p(u)p'(u)v - p'(u)q(u) + 2p(u)(p'(u)v + q'(u)) - p(u)p'(u)v - p(u)q'(u)) \\ &= 0,\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Assim, obtemos a equação diferencial

$$(A''(\tilde{u}) + A(\tilde{u}))' = \psi(\tilde{u})(A''(\tilde{u}) + A(\tilde{u})),$$

e portanto

$$A''(\tilde{u}) + A(\tilde{u}) = c_2 \exp \int_0^{\tilde{u}} \psi(t) dt \doteq \Psi(\tilde{u})c_2,$$

donde

$$A(\tilde{u}) = \cos \tilde{u} \, c_3 + \operatorname{sen} \tilde{u} \, c_4 + \left(\operatorname{sen} \tilde{u} \int_0^{\tilde{u}} \Psi(t) \cos t \, dt - \cos \tilde{u} \int_0^{\tilde{u}} \Psi(t) \operatorname{sen} t \, dt \right) c_2,$$

onde $c_3, c_4 \in \mathbb{L}^4$ são novas constantes de integração. Para simplificar a notação, chamemos $\xi(\tilde{u})$ o coeficiente multiplicando c_2 na expressão acima. Claramente $\xi'' + \xi = \Psi > 0$. Assim:

$$\begin{aligned} x(\tilde{u}, v) = & \left(v \cos \tilde{u} - \int_0^{\tilde{u}} r(t) \operatorname{sen} t \, dt \right) c_3 + \left(v \operatorname{sen} \tilde{u} + \int_0^{\tilde{u}} r(t) \cos t \, dt \right) c_4 + \\ & + \left(v \xi(\tilde{u}) + \int_0^{\tilde{u}} r(t) \xi'(t) \, dt \right) c_2 + c_1. \end{aligned}$$

Resta achar condições sobre as constantes de integração.

Afirmção. *Nas condições acima, c_2, c_3 e c_4 são dois a dois ortogonais, com c_3 e c_4 unitários de tipo espaço, e c_2 de tipo luz.*

Justificativa: Iniciamos observando que $\xi(0) = \xi'(0) = 0$ e que $r(0) \neq 0$ (pela regularidade de x). Derivando a expressão encontrada para x , temos

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) &= -\operatorname{sen} \tilde{u} (v + r(\tilde{u})) c_3 + \cos \tilde{u} (v + r(\tilde{u})) c_4 + \xi'(\tilde{u}) (v + r(\tilde{u})) c_2, \quad \text{e} \\ x_v(\tilde{u}, v) &= \cos \tilde{u} \, c_3 + \operatorname{sen} \tilde{u} \, c_4 + \xi(\tilde{u}) c_2. \end{aligned}$$

Com isto, as condições

$$r(0)^2 = \langle x_{\tilde{u}}(0,0), x_{\tilde{u}}(0,0) \rangle, \quad 0 = \langle x_{\tilde{u}}(0,0), x_v(0,0) \rangle \quad \text{e} \quad 1 = \langle x_v(0,0), x_v(0,0) \rangle$$

lêem-se como

$$\langle c_4, c_4 \rangle = 1, \quad \langle c_3, c_4 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle c_3, c_3 \rangle = 1.$$

Com isto, a condição $1 = \langle x_v(\tilde{u}, v), x_v(\tilde{u}, v) \rangle$ torna-se $1 = 1 + \xi(\tilde{u})^2 \langle c_2, c_2 \rangle$ para todo \tilde{u} , donde $\langle c_2, c_2 \rangle = 0$. Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}\tilde{u}}(0,0) &= -r(0)c_3 + r'(0)c_4 + \xi''(0)r(0)c_2 \quad \text{e} \\ x_{\tilde{u}v}(\tilde{u}, v) &= -\operatorname{sen} \tilde{u} \, c_3 + \cos \tilde{u} \, c_4 + \xi'(\tilde{u})c_2 \end{aligned}$$

donde

$$\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v), x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) \rangle = (v + r(\tilde{u}))^2 \implies \langle x_{\tilde{u}\tilde{u}}(0,0), x_{\tilde{u}}(0,0) \rangle = r'(0)r(0)$$

torna-se

$$r'(0)r(0) = r'(0)r(0) + \xi''(0)r(0)^2 \langle c_2, c_4 \rangle,$$

e portanto $\langle c_2, c_4 \rangle = 0$. Finalmente, temos que

$$\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v), x_v(\tilde{u}, v) \rangle = 0 \implies \langle x_{\tilde{u}\tilde{u}}(0,0), x_v(0,0) \rangle + \langle x_{\tilde{u}}(0,0), x_{\tilde{u}v}(0,0) \rangle = 0$$

e assim $-r(0) + \xi''(0)r(0) \langle c_2, c_3 \rangle + r(0) = 0$ nos dá $\langle c_2, c_3 \rangle = 0$. ■

Com isto a Proposição 1.1.19 nos permite aplicar uma transformação de Poincaré e supor que $c_1 = 0$, $c_2 = (1, 0, 0, 1)$, $c_3 = (0, 1, 0, 0)$ e $c_4 = (0, 0, 1, 0)$, de modo que renomeando $\tilde{u} \rightarrow u$ obtemos

$$x(u, v) = \begin{pmatrix} v \xi(u) + \int_0^u r(t) \xi'(t) \, dt \\ v \cos u - \int_0^u r(t) \operatorname{sen} t \, dt \\ v \operatorname{sen} u + \int_0^u r(t) \cos t \, dt \\ v \xi(u) + \int_0^u r(t) \xi'(t) \, dt \end{pmatrix}$$

como desejado. □

3.3 A classificação em S_1^4 e H_1^4

Neste ponto, buscamos uma classificação similar à dada no Teorema 3.2.1 (p. 62), agora para os espaços de de Sitter e anti-de Sitter, S_1^4 e H_1^4 . Podemos simplificar a estratégia de demonstração e tratar as duas situações simultaneamente, utilizando a seguinte notação: se $c \in \{-1, 1\}$ denota a curvatura do ambiente analisado, colocamos

$$c_c(x) \doteq \begin{cases} \cos x, & \text{se } c = 1 \\ \cosh x, & \text{se } c = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s_c(x) \doteq \begin{cases} \sin x, & \text{se } c = 1 \\ \sinh x, & \text{se } c = -1 \end{cases}'$$

bem como $t_c(x) \doteq s_c(x)/c_c(x)$.

Observação. Em [23], esta notação é empregada com $c \in \mathbb{R}$ qualquer, a fim de estudar geometrias esféricas e hiperbólicas de várias curvaturas simultaneamente. As funções c_c e s_c ficam caracterizadas pelas condições

$$c_c^2 + c s_c^2 = 1, \quad s_c' = c_c \quad \text{e} \quad c_c' = -c s_c.$$

Em particular, teríamos $c_0(x) = 1$ e $s_0(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por conveniência, registramos dois lemas gerais sobre estas funções trigonométricas, utilizando a notação adotada:

Lema 3.3.1. *Sejam $c \in \{-1, 1\}$ e $x, y \in \mathbb{R}$. Então:*

(i) $c_c(x + y) = c_c(x)c_c(y) - c s_c(x)s_c(y)$;

(ii) $s_c(x + y) = s_c(x)c_c(y) + c_c(x)s_c(y)$;

(iii) $t_c(x + y) = \frac{t_c(x) + t_c(y)}{1 - c t_c(x)t_c(y)}$, sempre que a expressão fizer sentido.

Lema 3.3.2 (Superposição de ondas). *Sejam $c \in \{-1, 1\}$ e $a, b, x \in \mathbb{R}$ não nulos.*

(i) *Se $a^2 + cb^2 > 0$, então*

$$a c_c(x) + b s_c(x) = \sqrt{a^2 + cb^2} c_c(x - c\theta),$$

onde $t_c(\theta) = b/a$;

(ii) *Se $ca^2 + b^2 > 0$, então*

$$a c_c(x) + b s_c(x) = \sqrt{ca^2 + b^2} s_c(x + \theta),$$

onde $t_c(\theta) = a/b$.

Demonstração: Façamos o item (i), sendo o (ii) completamente análogo. Queremos escrever $a c_c(x) + b s_c(x) = R c_c(x - c\theta)$ para certos reais R e θ . Usando o lema anterior, temos

$$\begin{aligned} a c_c(x) + b s_c(x) &= R c_c(x - c\theta) \\ &= R(c_c(x)c_c(-c\theta) - c s_c(x)s_c(-c\theta)) \\ &= R(c_c(x)c_c(\theta) + s_c(x)s_c(\theta)) \\ &= R c_c(\theta)c_c(x) + R s_c(\theta)s_c(x), \end{aligned}$$

donde $a = R c_c(\theta)$ e $b = R s_c(\theta)$, por comparação⁷. Assim, temos

$$a^2 + cb^2 = R^2 c_c^2(\theta) + c R^2 s_c^2(\theta) = R^2.$$

⁷Independência linear de $\{c_c, s_c\}$, se formos ser precisos.

Finalmente, temos que $t_c(\theta) = b/a$, como desejado. □

Agora estamos prontos para enunciar e provar os teoremas restantes deste capítulo:

Teorema 3.3.3. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{S}_1^4$ uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada e com nulidade relativa positiva. Então M é localmente congruente a um aberto de uma superfície da forma*

(i) $x(u, v) = (\zeta(u) \cos v, \sin u \cos v, \sin v, \cos u \cos v, \zeta(u) \cos v)$, onde ζ é uma função suave definida em um intervalo qualquer, com $\zeta'' + \zeta \neq 0$ em cada ponto, ou;

$$(ii) \ x(s, v) = \cos v \begin{pmatrix} \ell(s) \\ x_\eta(s) \\ y_\eta(s) \\ z_\eta(s) \\ \ell(s) \end{pmatrix} - \sin v \begin{pmatrix} b - \int_0^s r(t) \ell'(t) dt \\ V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ b - \int_0^s r(t) \ell'(t) dt \end{pmatrix}, \text{ onde } b \in \mathbb{R}, r \text{ e } \ell \text{ são funções suaves}$$

definidas em um intervalo contendo a origem, $\eta = (x_\eta, y_\eta, z_\eta)$ é uma curva em \mathbb{S}^2 com velocidade unitária e curvatura geodésica não-constante r , e (V_1, V_2, V_3) é o vetor unitário normal à η e tangente à \mathbb{S}^2 .

Observação.

- Em [40], a segunda e a quarta componente do caso (i) acima estão trocadas, mas isso não é um problema, visto que a aplicação que as destroca é uma transformação de Lorentz e, portanto, restringe-se a uma isometria de \mathbb{S}_1^4 . Independente disto, a expressão dada é interessante por si só: as três componentes do meio parametrizam uma esfera \mathbb{S}^2 , enquanto as componentes de tipo luz $\zeta(u) \cos v$ lembram coordenadas polares em um setor de tipo espaço ortogonal ao 3-plano que contém esta \mathbb{S}^2 .
- A parametrização dada no caso (ii) construída para a geodésica $\eta(s) = (\sin s, 0, \cos s)$ de \mathbb{S}^2 , com normal $(0, -1, 0)$ e $b = 0$ acaba por nos fornecer o caso (i).

Teorema 3.3.4. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{H}_1^4$ uma superfície não-degenerada, marginalmente aprisionada e com nulidade relativa positiva. Então M é localmente congruente a um aberto de uma superfície da forma*

(i) $x(u, v) = (\zeta(u) \cosh v, \sinh u \cosh v, \sinh v, \cosh u \cosh v, \zeta(u) \cosh v)$, onde ζ é uma função suave definida em um intervalo qualquer, com $\zeta'' - \zeta \neq 0$ em cada ponto, ou;

(ii) $x(u, v) = (\zeta(u) \sinh v, \sin u \sinh v, \cos u \sinh v, \cosh v, \zeta(u) \sinh v)$, onde ζ é uma função suave definida em um intervalo qualquer, com $\zeta'' + \zeta \neq 0$ em cada ponto, ou;

(iii) $x(u, v) = \left(u^2 e^v - \frac{e^v}{2}, u e^v, e^{-v}, \frac{e^v}{2} + e^{-v}, u^2 e^v \right)$, ou;

(iv) $x(u, v) = \left(\sinh v - \frac{u^2 e^v}{2}, \zeta(u) e^v, u e^v, \zeta(u) e^v, \sinh v - \frac{u^2 e^v}{2} - e^v \right)$, onde ζ é uma função suave definida em um intervalo qualquer, com $\zeta'' \neq 0$ em cada ponto, ou;

$$(v) \ x(s, v) = \cosh v \begin{pmatrix} \ell(s) \\ x_\eta(s) \\ y_\eta(s) \\ z_\eta(s) \\ \ell(s) \end{pmatrix} - \sinh v \begin{pmatrix} b - \int_0^s r(t) \ell'(t) dt \\ V_1(s) \\ V_2(s) \\ V_3(s) \\ b - \int_0^s r(t) \ell'(t) dt \end{pmatrix}, \text{ onde } b \in \mathbb{R}, r \text{ e } \ell \text{ são funções suaves}$$

definidas em um intervalo contendo a origem, $\eta = (x_\eta, y_\eta, z_\eta)$ é uma curva em \mathbb{H}^2 com velocidade unitária e curvatura geodésica não-constante r , e (V_1, V_2, V_3) é o vetor unitário normal à η e tangente à \mathbb{H}^2 .

Observação.

- Nos casos (i) e (ii) ocorre algo semelhante ao observado anteriormente: as coordenadas centrais parametrizam um plano hiperbólico \mathbb{H}^2 , e as componentes de tipo luz $\zeta(u) \cosh v$ (resp. $\zeta(u) \sinh v$) lembram *coordenadas de Rindler* em uma cunha de tipo espaço (resp. tempo) ortogonal ao 3-plano que contém este \mathbb{H}^2 . Para mais comentários sobre tais coordenadas, veja [27].
- Em princípio, a parametrização dada no caso (v) é feita para curvas com curvatura geodésica não-constante. Entretanto, escolher uma curva η com curvatura geodésica constante $|\kappa_{g,\eta}| < 1$ produzirá o caso (i), enquanto $|\kappa_{g,\eta}| > 1$ produzirá o caso (ii). Já quando η é um *horocírculo* ($|\kappa_{g,\eta}| = 1$), obtemos a menos de uma isometria o caso (iii) ou o caso (iv).

Recomendo que na demonstração a seguir todas as Justificativas dadas sejam omitidas em uma primeira leitura, a fim de manter o foco na ideia geral.

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 3.2.1 (p. 62), verifica-se diretamente que todas as superfícies listadas acima são marginalmente aprisionadas e com nulidade relativa positiva. Considere novamente a parametrização $x: U \rightarrow x[U] \subseteq M$ dada pela Proposição 3.1.8 (p. 61). Neste caso, $(e^\lambda)_{vv} + ce^\lambda = 0$ implica que $e^{\lambda(u,v)} = p(u)c_c(v) + q(u)s_c(v)$, para certas funções suaves p e q .

Vamos analisar a situação por casos, repetindo a estratégia anterior, que essencialmente consistia em começar com uma ou mais reparametrizações convenientes, calcular os Símbolos de Christoffel em tais coordenadas, bem como a Segunda Forma Fundamental de M , e usar esses dados para obter as derivadas de x . Feito isso, resolver o sistema de equações diferenciais parciais resultante. Finalmente, achar condições sobre as constantes de integração a fim de aplicar uma isometria para levar o resultado encontrado em alguma das superfícies listadas nos enunciados dos teoremas.

Recordamos que se $N(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, então a Segunda Forma Fundamental $\bar{\Pi}$ de $\mathbb{M}_1^4(c)$ relativa à \mathbb{L}^5 ou \mathbb{R}_2^5 (conforme $c = 1$ ou -1 , respectivamente), é dada por $\bar{\Pi}(X, Y) = -c \langle X, Y \rangle N$, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M}_1^4(c))$. Dito isto, vamos ao trabalho:

- (a) Suponha que $c = 1$, ou que $c = -1$ e $|p(u)| > |q(u)|$. O caso $|p(u)| \leq |q(u)|$ fica incluso neste fazendo uma translação no parâmetro v , em vista da periodicidade de \cos e \sin . Então, pelo Lema 3.3.2 (p. 67) podemos escrever $e^{\lambda(u,v)} = \alpha(u)c_c(v + \beta(u))$ para certas funções suaves $\alpha \neq 0$ e β . Sendo \tilde{u} uma primitiva de α , temos $d\tilde{u} = \alpha(u) du$ e assim

$$\begin{aligned} (p(u)c_c(v) + q(u)s_c(v))^2 du^2 + dv^2 &= (\alpha(u)c_c(v + \beta(u)))^2 du^2 + dv^2 \\ &= c_c^2(v + \beta(u)) d\tilde{u}^2 + dv^2 \\ &= c_c^2(v + \gamma(\tilde{u})) d\tilde{u}^2 + dv^2, \end{aligned}$$

onde usamos que $\alpha \neq 0$ para aplicar o Teorema da Função Inversa e escrever $\gamma(\tilde{u}) = \beta(u)$, com γ suave. Calculando os Símbolos de Christoffel para estas coordenadas, temos que

$$\Gamma_{\tilde{u}\tilde{u}}^{\tilde{u}} = -c\gamma'(\tilde{u})t_c(v + \gamma(\tilde{u})), \quad \Gamma_{\tilde{u}\tilde{u}}^v = \frac{c}{2}s_c(2(v + \gamma(\tilde{u}))) \quad \text{e} \quad \Gamma_{\tilde{u}v}^{\tilde{u}} = -ct_c(v + \gamma(\tilde{u})),$$

enquanto os restantes se anulam. Calculamos agora a Segunda Forma Fundamental II de M

relativa à $\mathbb{M}_1^4(c)$, lembrando que dualizar $d\tilde{u} = \alpha(u) du$ nos dá $\partial_{\tilde{u}} = \alpha(u)^{-1}\partial_u$:

$$\begin{aligned}\Pi(\partial_{\tilde{u}}, \partial_{\tilde{u}}) &= \frac{1}{\alpha(u)^2} \Pi(\partial_u, \partial_u) = \frac{1}{\alpha(u)^2} \Pi(e^{\lambda(u,v)} \mathbf{E}_1, e^{\lambda(u,v)} \mathbf{E}_1) \\ &= \frac{(e^{\lambda(u,v)})^2}{\alpha(u)^2} \Pi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1) = \frac{(\alpha(u) \mathfrak{c}_c(v + \gamma(\tilde{u})))^2}{\alpha(u)^2} \mathbf{L}_+ \\ &= \mathfrak{c}_c^2(v + \gamma(\tilde{u})) \mathbf{L}_+\end{aligned}$$

Com isto, o item (i) da Proposição 1.2.34 (p. 33), nos dá:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, v) &= -c\gamma'(\tilde{u})\mathfrak{t}_c(v + \gamma(\tilde{u}))\mathbf{x}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) + \frac{c}{2}\mathfrak{s}_c(2(v + \gamma(\tilde{u})))\mathbf{x}_v(\tilde{u}, v) + \\ &\quad + \mathfrak{c}_c^2(v + \gamma(\tilde{u}))(\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, v)) - c\mathbf{x}(\tilde{u}, v)), \\ \mathbf{x}_{\tilde{u}v}(\tilde{u}, v) &= -c\mathfrak{t}_c(v + \gamma(\tilde{u}))\mathbf{x}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) \quad \text{e} \\ \mathbf{x}_{v\tilde{u}}(\tilde{u}, v) &= -c\mathbf{x}(\tilde{u}, v).\end{aligned}\tag{†}$$

Agora temos dois subcasos:

- (a₁) Quando γ é constante. Então podemos colocar $\tilde{v} \doteq v + \gamma$, de modo que $d\tilde{v} = dv$ e $\partial_{\tilde{v}} = \partial_v$. Em particular, note que a métrica toma a forma $\mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$. Assim, o sistema (†) simplifica-se⁸ para:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= c\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathfrak{s}_c(\tilde{v})\mathbf{x}_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) + \mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})(\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) - c\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})), \\ \mathbf{x}_{\tilde{u}\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= -c\mathfrak{t}_c(\tilde{v})\mathbf{x}_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \quad \text{e} \\ \mathbf{x}_{\tilde{v}\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= -c\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v}).\end{aligned}\tag{‡}$$

Resolvendo a última equação, temos que $\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) + \mathfrak{s}_c(\tilde{v})\mathbf{B}(\tilde{u})$, para certas funções vetoriais \mathbf{A} e \mathbf{B} em \mathbb{L}^5 ou \mathbb{R}_2^5 . Em princípio teríamos uma constante de integração livre, que determinaria o “centro” do ambiente: tomaremos-a como o vetor nulo.

A segunda equação de (‡) lê-se então como

$$-c\mathfrak{s}_c(\tilde{v})\mathbf{A}'(\tilde{u}) + \mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathbf{B}'(\tilde{u}) = -c\mathfrak{t}_c(\tilde{v})(\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathbf{A}'(\tilde{u}) + \mathfrak{s}_c(\tilde{v})\mathbf{B}'(\tilde{u})),$$

donde segue imediatamente que $\mathbf{B}' = \mathbf{0}$, de modo que \mathbf{B} é uma constante c_1 .

Afirmção. *Nestas condições, temos*

$$\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) = \frac{\mathbf{A}''(\tilde{u}) + c\mathbf{A}(\tilde{u})}{\mathfrak{c}_c(\tilde{v})}.$$

Justificativa: Basta calcularmos $\mathbf{x}_{\tilde{u}\tilde{u}}$ diretamente, e usando a primeira equação em (‡):

$$\begin{aligned}c_c(\tilde{v})\mathbf{A}''(\tilde{u}) &= c\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathfrak{s}_c(\tilde{v})(\mathfrak{c}_c(\tilde{v})c_1 - c\mathfrak{s}_c(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u})) + \mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})(\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) - c\mathfrak{s}_c(\tilde{v})c_1 - c\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u})) \\ &= c\mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})\mathfrak{s}_c(\tilde{v})c_1 - \mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathfrak{s}_c^2(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) + \mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) - c\mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})\mathfrak{s}_c(\tilde{v})c_1 - c\mathfrak{c}_c^3(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) \\ &= -\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathfrak{s}_c^2(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) + \mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) - c\mathfrak{c}_c^3(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) \\ &= -(\mathfrak{s}_c^2(\tilde{v}) + c\mathfrak{c}_c^2(\tilde{v}))\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) + \mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) \\ &\stackrel{(*)}{=} -c\mathfrak{c}_c(\tilde{v})\mathbf{A}(\tilde{u}) + \mathfrak{c}_c^2(\tilde{v})\mathbf{L}_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})),\end{aligned}$$

onde em (*) usamos que $\mathfrak{c}_c^2(\tilde{v}) + c\mathfrak{s}_c^2(\tilde{v}) = 1$ implica que $c\mathfrak{c}_c^2(\tilde{v}) + \mathfrak{s}_c^2(\tilde{v}) = c$. ■

Agora, aplicando $\overline{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}}$ na expressão obtida e usando o item (iv) da Proposição 3.1.8 (p.

⁸ A rigor, há um abuso de notação ocorrendo aqui. Teríamos $(\tilde{u}, \tilde{v} - \gamma)$ nos argumentos de x e suas derivadas. Estamos definindo $\tilde{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) \doteq x(\tilde{u}, \tilde{v} - \gamma)$ e imediatamente renomeando $\tilde{x} \rightarrow x$.

61), segue que

$$\frac{A'''(\tilde{u}) + cA'(\tilde{u})}{c_c(\tilde{v})} = \phi(E_1)(A''(\tilde{u}) + cA(\tilde{u})),$$

e portanto

$$(A''(\tilde{u}) + cA(\tilde{u}))' = \phi(E_1)c_c(\tilde{v})(A''(\tilde{u}) + cA(\tilde{u})).$$

Afirmção. Na expressão acima, $\phi(E_1)c_c(\tilde{v})$ não depende de \tilde{v} , e logo é da forma $\psi(\tilde{u})$ para alguma função suave ψ .

Justificativa: É uma conta similar à feita no caso (b) da demonstração do Teorema 3.2.1 (p. 62), expressando $\phi(E_1)c_c(\tilde{v})$ em termos das derivadas de λ , e assim será omitida. ■

Prosseguindo com o argumento, temos que

$$A''(\tilde{u}) + cA(\tilde{u}) = \Psi(\tilde{u})c_2,$$

onde c_2 é constante e $\Psi > 0$ é suave. Resolvendo tal equação diferencial, vem que

$$A(\tilde{u}) = c_c(\tilde{u})c_3 + s_c(\tilde{u})c_4 + \left(s_c(\tilde{u}) \int_0^{\tilde{u}} \Psi(t)c_c(t) dt - c_c(\tilde{u}) \int_0^{\tilde{u}} \Psi(t)s_c(t) dt \right) c_2,$$

onde c_3 e c_4 são ainda novas constantes de integração. Denotando por $\zeta(\tilde{u})$ o coeficiente de c_2 na expressão acima, temos que $\zeta'' + c\zeta = \Psi > 0$ e

$$x(\tilde{u}, \tilde{v}) = s_c(\tilde{v})c_1 + \zeta(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_2 + c_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_3 + s_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_4.$$

Afirmção. Nas condições acima, c_1, c_2, c_3 e c_4 são dois a dois ortogonais, com c_1 e c_4 unitários de tipo espaço, c_2 de tipo luz, e $\langle c_3, c_3 \rangle = c$.

Justificativa: Como antes, temos $\zeta(0) = \zeta'(0) = 0$ e $\zeta''(0) \neq 0$. Além disto

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \zeta'(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_2 - cs_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_3 + c_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_4, \quad e \\ x_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= c_c(\tilde{v})c_1 - c\zeta(\tilde{u})s_c(\tilde{v})c_2 - cc_c(\tilde{u})s_c(\tilde{v})c_3 - cs_c(\tilde{u})s_c(\tilde{v})c_4. \end{aligned}$$

Com isto

$$1 = \langle x_{\tilde{u}}(0, 0), x_{\tilde{u}}(0, 0) \rangle, \quad 0 = \langle x_{\tilde{u}}(0, 0), x_{\tilde{v}}(0, 0) \rangle \quad e \quad 1 = \langle x_{\tilde{v}}(0, 0), x_{\tilde{v}}(0, 0) \rangle$$

tornam-se

$$1 = \langle c_4, c_4 \rangle, \quad 0 = \langle c_4, c_1 \rangle \quad e \quad 1 = \langle c_1, c_1 \rangle,$$

respectivamente. Prosseguindo, desenvolvemos a igualdade $1 = \langle x_{\tilde{v}}(0, \tilde{v}), x_{\tilde{v}}(0, \tilde{v}) \rangle$ e obtemos

$$1 = c_c^2(\tilde{v}) - 2s_c(\tilde{v})c_c(\tilde{v}) \langle c_1, c_3 \rangle + s_c^2(\tilde{v}) \langle c_3, c_3 \rangle$$

para todo \tilde{v} . Simplificando, vem que

$$c = \langle c_3, c_3 \rangle - \frac{2}{c_c(\tilde{v})} \langle c_1, c_3 \rangle$$

para todo $\tilde{v} \neq 0$, e assim concluímos que $\langle c_3, c_3 \rangle = c$ e $\langle c_1, c_3 \rangle = 0$. Derivando persistentemente, temos

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= \zeta''(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_2 - cc_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_3 - cs_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_4, \\ x_{\tilde{u}\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= -c\zeta'(\tilde{u})s_c(\tilde{v})c_2 + s_c(\tilde{u})s_c(\tilde{v})c_3 - cc_c(\tilde{u})s_c(\tilde{v})c_4 \quad e \\ x_{\tilde{v}\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) &= -cs_c(\tilde{v})c_1 - c\zeta(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_2 - cc_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_3 - cs_c(\tilde{u})c_c(\tilde{v})c_4. \end{aligned}$$

Com isto, avaliar as derivadas de $\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), x_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = 0$ em $(0, 0)$ nos dá imediatamente que $\langle c_1, c_2 \rangle = \langle c_3, c_4 \rangle = 0$. E como $\zeta''(0) \neq 0$, avaliar a derivada em relação à \tilde{u} de $\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = c_c^2(\tilde{v})$ em $(0, 0)$ também nos dá $\langle c_2, c_4 \rangle = 0$.

Falta pouco. Avaliando a derivada em relação à \tilde{v} de $\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = c_c^2(\tilde{v})$ em $\tilde{u} = 0$, obtemos

$$-cs_c(\tilde{v})\zeta''(0) \langle c_2, c_3 \rangle - cs_c(\tilde{v}) = -cs_c(\tilde{v})$$

para todo \tilde{v} , e assim segue que $\langle c_2, c_3 \rangle = 0$. Finalmente, voltamos para a expressão $\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}), x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle = c_c^2(\tilde{v})$, que agora lê-se como $\tilde{\zeta}'(\tilde{u})^2 \langle c_2, c_2 \rangle = 0$ para todo \tilde{u} , donde $\langle c_2, c_2 \rangle = 0$. ■

Assim, podemos supor que $c_1 = (0, 0, 1, 0, 0)$, $c_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $c_3 = (0, 0, 0, 1, 0)$ e $c_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$. Com isto, renomeando $(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u, v)$ e substituindo concretamente $c = 1$ e -1 na expressão encontrada, recuperamos (i) em ambos os teoremas:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= (\zeta(u) \cos v, \operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, \zeta(u) \cos v) \text{ em } \mathbb{S}_1^4, \text{ e} \\ x(u, v) &= (\zeta(u) \cosh v, \operatorname{senh} u \cosh v, \operatorname{senh} v, \cosh u \cosh v, \zeta(u) \cosh v) \text{ em } \mathbb{H}_1^4. \end{aligned}$$

(a₂) Quando γ é não-constante. Começamos a resolver novamente o sistema (+) (p. 70), pela terceira equação, donde $x(\tilde{u}, v) = c_c(v)A(\tilde{u}) + s_c(v)B(\tilde{u})$ para certas funções vetoriais A e B . Usando a segunda equação de (‡) juntamente com o item (iii) do Lema 3.3.1 (p. 67), temos

$$-cs_c(v)A'(\tilde{u}) + c_c(v)B'(\tilde{u}) = \frac{t_c(v) + t_c(\gamma(\tilde{u}))}{1 - ct_c(v)t_c(\gamma(\tilde{u}))} (-cc_c(v)A'(\tilde{u}) - cs_c(v)B'(\tilde{u})),$$

donde $B'(\tilde{u}) = -ct_c(\gamma(\tilde{u}))A'(\tilde{u})$ e assim

$$x(\tilde{u}, v) = c_c(v)A(\tilde{u}) + s_c(v) \left(c_1 - c \int_0^{\tilde{u}} t_c(\gamma(t))A'(t) dt \right),$$

para uma certa constante de integração c_1 .

Afirmção. Vista como uma curva, A é de tipo espaço e regular. Portanto, admite um parâmetro de arco⁹ s e uma reparametrização \tilde{A} com velocidade unitária. Além disto, a correspondente reparametrização \tilde{x} de x fica dada por

$$\tilde{x}(s, v) = c_c(v)\tilde{A}(s) + s_c(v) \left(c_1 + \int_0^s r(t)A'(t) dt \right),$$

onde $r(s) \doteq -c t_c(\gamma(\tilde{u}(s)))$ é suave e não-constante.

Justificativa: Derivando a expressão encontrada, temos $x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) = (c_c(v) - cs_c(v)t_c(\gamma(\tilde{u})))A'(\tilde{u})$. Assim, usamos a expressão para a métrica encontrada anteriormente e obtemos que

$$c_c^2(v + \gamma(\tilde{u})) = \langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v), x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) \rangle = (c_c(v) - cs_c(v)t_c(\gamma(\tilde{u})))^2 \langle A'(\tilde{u}), A'(\tilde{u}) \rangle,$$

para todos os pares (\tilde{u}, v) possíveis. Fazendo $v = 0$ segue que $\langle A'(\tilde{u}), A'(\tilde{u}) \rangle = c_c^2(\gamma(\tilde{u})) > 0$, e assim A é de tipo espaço e regular. Sendo s uma função comprimento de arco para A , colocamos $\tilde{A}(s) \doteq A(\tilde{u}(s))$. A expressão para \tilde{x} é então clara. ■

Note que $ds = c_c(\gamma(\tilde{u})) d\tilde{u}$ e $\partial_s = c_c(\gamma(\tilde{u}))^{-1} \partial_{\tilde{u}}$, de modo que a métrica se escreve nas coordenadas (s, v) como

$$\begin{aligned} c_c^2(v + \gamma(\tilde{u}))d\tilde{u}^2 + dv^2 &= (c_c(v)c_c(\gamma(\tilde{u})) - cs_c(v)s_c(\gamma(\tilde{u})))^2 d\tilde{u}^2 + dv^2 \\ &= (c_c(v)c_c(\gamma(\tilde{u})) - cs_c(v)c_c(\gamma(\tilde{u}))t_c(\gamma(\tilde{u})))^2 d\tilde{u}^2 + dv^2 \\ &= (c_c(v) + r(s)s_c(v))^2 ds^2 + dv^2, \end{aligned}$$

⁹A função inversa do comprimento de arco fica denotada também por \tilde{u} , como de praxe.

e a Segunda Forma Fundamental se expressa como

$$\begin{aligned} \Pi(\partial_s, \partial_s) &= \frac{1}{c_c^2(\gamma(\tilde{u}))} \Pi(\partial_{\tilde{u}}, \partial_{\tilde{u}}) = \frac{c_c^2(v + \gamma(\tilde{u}))}{c_c^2(\gamma(\tilde{u}))} L_+ \\ &= \left(\frac{c_c(v) c_c(\gamma(\tilde{u})) - c s_c(v) s_c(\gamma(\tilde{u}))}{c_c(\gamma(\tilde{u}))} \right)^2 L_+ = (c_c(v) + r(s) s_c(v))^2 L_+. \end{aligned}$$

Uma vez calculados os Símbolos de Christoffel relevantes

$$\tilde{\Gamma}_{ss}^s = \frac{r'(s) s_c(v)}{c_c(v) + r(s) s_c(v)}, \quad \tilde{\Gamma}_{sv}^s = \frac{r(s) c_c(v) - c s_c(v)}{c_c(v) + r(s) s_c(v)} \quad e$$

$$\tilde{\Gamma}_{ss}^v = c(c_c(v) + r(s) s_c(v))(s_c(v) - cr(s) c_c(v)),$$

o item (i) da Proposição 1.2.34 (p. 33) nos dá o novo sistema

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ss}(s, v) &= \frac{r'(s) s_c(v)}{c_c(v) + r(s) s_c(v)} \tilde{x}_s + c(c_c(v) + r(s) s_c(v))(s_c(v) - cr(s) c_c(v)) \tilde{x}_v + \\ &\quad + (c_c(v) + r(s) s_c(v))^2 (L_+(\tilde{x}(s, v)) - c\tilde{x}(s, v)), \\ \tilde{x}_{sv}(s, v) &= \frac{r(s) c_c(v) - c s_c(v)}{c_c(v) + r(s) s_c(v)} \tilde{x}_s(s, v) \quad e \\ \tilde{x}_{vv}(s, v) &= -c\tilde{x}(s, v). \end{aligned} \tag{##}$$

Nosso próximo passo é produzir uma equação diferencial para \tilde{A} que possa ser resolvida. Voltamos a empregar o item (iv) da Proposição 3.1.8 (p. 61), para obtermos ainda outra:

Afirmção. *Existem um vetor constante c_2 de tipo luz e uma função suave $\Psi > 0$ tais que*

$$L_+(\tilde{x}(s, v)) = \frac{r(s) \Psi(s)}{c_c(v) + r(s) s_c(v)} c_2.$$

Justificativa: Substituindo a expressão encontrada para \tilde{x} na afirmação anterior na primeira equação de (##), realizando as distributivas e cancelando o que for possível, obtemos

$$\tilde{A}''(s) = -c\tilde{A}(s) - r(s) \int_0^s r(t) \tilde{A}'(t) dt - r(s) c_1 + (c_c(v) + r(s) s_c(v)) L_+(\tilde{x}(s, v)).$$

Trabalhando localmente, podemos supor que r não se anula (pois γ é não-constante), de modo que

$$\left(\frac{c_c(v)}{r(s)} + s_c(v) \right) L_+(\tilde{x}(s, v)) = \frac{\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}(s)}{r(s)} + c_1 + \int_0^s r(t) \tilde{A}'(t) dt.$$

Aplicando $\bar{\nabla}_{\partial_s}$, temos que

$$\left(\frac{c_c(v)}{r(s)} + s_c(v) \right) \bar{\nabla}_{\partial_s} L_+ - \frac{r'(s) c_c(v)}{r(s)^2} L_+(\tilde{x}(s, v)) = \frac{\tilde{A}'''(s) + c\tilde{A}'(s)}{r(s)} - \frac{r'(s)}{r(s)^2} (\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}(s)) + r(s) \tilde{A}'(s).$$

Nesta expressão, substituímos

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_{\partial_s} L_+ &= \frac{1}{c_c(\gamma(\tilde{u}))} \bar{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}} L_+ = \frac{1}{\alpha(u) c_c(\gamma(\tilde{u}))} \bar{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}} L_+ \\ &= \frac{e^{\lambda(u, v)}}{\alpha(u) c_c(\gamma(\tilde{u}))} \bar{\nabla}_{E_1} L_+ = \frac{\alpha(u) c_c(v + \gamma(\tilde{u}))}{\alpha(u) c_c(\gamma(\tilde{u}))} \phi(E_1) L_+(\tilde{x}(s, v)) \\ &= (c_c(v) - c s_c(v) t_c(\gamma(\tilde{u}))) \phi(E_1) L_+(\tilde{x}(s, v)) = \phi(E_1) (c_c(v) + r(s) s_c(v)) L_+(\tilde{x}(s, v)) \\ &= \phi(E_1) \left(\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}(s) + r(s) \int_0^s r(t) \tilde{A}'(t) dt + r(s) c_1 \right), \end{aligned}$$

bem como a própria expressão para $L_+(\tilde{x}(s, v))$, e assim obtemos

$$\frac{\tilde{A}'''(s) + c\tilde{A}'(s)}{r(s)} - \frac{r'(s)}{r(s)^2}(\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}'(s)) + r(s)\tilde{A}'(s) = f(s) \left(\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}'(s) + r(s) \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt + r(s)c_1 \right)$$

após simplificações, onde

$$f(s) \doteq \phi(E_1) \left(\frac{c_c(v)}{r(s)} + s_c(v) \right) - \frac{r'(s)c_c(v)}{r(s)^2(c_c(v) + r(s)s_c(v))}.$$

Devido à presença de $\phi(E_1)$, seria necessária a verificação de que f realmente não depende de v - a omitiremos. Reorganizando tal expressão, obtemos

$$\left(\frac{\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}'(s)}{r(s)} + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt \right)' = r(s)f(s) \left(\frac{\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}'(s)}{r(s)} + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt + c_1 \right),$$

que pode ser integrada para

$$\frac{\tilde{A}''(s) + c\tilde{A}'(s)}{r(s)} + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt = \Psi(s)c_2 - c_1, \quad (*)$$

onde $\Psi(s) \doteq \exp\left(\int_0^s r(t)f(t) dt\right) > 0$ é suave e c_2 é constante. Isto nos permite facilmente isolar $L_+(\tilde{x}(s, v))$, como indicado. Em particular, c_2 é forçado a ser de tipo luz. ■

Agora estamos em condições de obter mais informações sobre os produtos envolvendo \tilde{A} , c_1 e c_2 :

Afirmção. Nas condições acima, c_2 é ortogonal a ambos $\tilde{A}(s)$ e c_1 . Além disto, c_1 é unitário de tipo espaço, $\langle \tilde{A}(s), \tilde{A}(s) \rangle = c$ e

$$\left\langle \tilde{A}(s), c_1 + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt \right\rangle = 0.$$

Justificativa: Neste ponto, podemos derivar a expressão encontrada anteriormente para \tilde{x} , obtendo

$$\begin{aligned} \tilde{x}_s(s, v) &= (c_c(v) + r(s)s_c(v))\tilde{A}'(s) \quad \text{e} \\ \tilde{x}_v(s, v) &= -cs_c(v)\tilde{A}(s) + c_c(v) \left(c_1 + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt \right). \end{aligned}$$

Como L_+ e, portanto, c_2 é normal à M , temos

$$\left\langle c_1 + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt, c_2 \right\rangle = \langle \tilde{x}_v(s, 0), c_2 \rangle = 0,$$

e assim

$$0 = \langle \tilde{x}_v(s, v), c_2 \rangle = -cs_c(v) \langle \tilde{A}(s), c_2 \rangle$$

para todo v nos diz que $\langle \tilde{A}(s), c_2 \rangle = 0$. Derivando, temos que $\langle \tilde{A}'(s), c_2 \rangle = 0$, e assim

$$\langle c_1, c_2 \rangle = - \left\langle \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt, c_2 \right\rangle = - \int_0^s r(t) \langle \tilde{A}'(t), c_2 \rangle dt = 0,$$

pela linearidade de $\langle \cdot, c_2 \rangle$. Prosseguindo, note que

$$\langle \tilde{A}(s), \tilde{A}(s) \rangle = \langle \tilde{x}(s, 0), \tilde{x}(s, 0) \rangle = c \quad \text{e} \quad \langle c_1, c_1 \rangle = \langle \tilde{x}_v(0, 0), \tilde{x}_v(0, 0) \rangle = 1.$$

Finalmente, como $\langle \tilde{x}(s, v), \tilde{x}(s, v) \rangle = c$, podemos derivar em relação à v e obter

$$\left\langle \tilde{A}(s), c_1 + \int_0^s r(t)\tilde{A}'(t) dt \right\rangle = \langle \tilde{x}(s, 0), \tilde{x}_v(s, 0) \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

Assim, aplicando uma isometria de $\mathbb{M}_1^4(c)$, podemos supor que para algum $b \in \mathbb{R}$ temos que $c_1 = (-b, 1, 0, 0, 1)$, $c_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$ e $\tilde{A}(s) = (\ell(s), x_\eta(s), y_\eta(s), z_\eta(s), \ell(s))$, onde $\eta = (x_\eta, y_\eta, z_\eta)$ é uma curva de tipo espaço em $\mathbb{M}^2(c)$ com velocidade unitária. Em particular, temos que a imagem de \tilde{A} está contida em $\mathbb{R}c_2 \times \mathbb{M}^2(c)$.

Denotemos também por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto em \mathbb{R}^3 ou \mathbb{L}^3 , conforme a situação. Isto não deve causar confusão em vista dos mergulhos centrais de \mathbb{R}^3 e \mathbb{L}^3 em \mathbb{L}^5 e \mathbb{R}_2^5 , respectivamente (que são isométricos). Vejamos então como a geometria de \tilde{x} se relaciona com a de η :

Afirmção. A curvatura geodésica¹⁰ de η em $\mathbb{M}^2(c)$ é dada, a menos de sinal, precisamente por $|\kappa_{g,\eta}(s)| = |r(s)|$.

Justificativa: Inicialmente, calculamos a derivada covariante de η' :

$$\begin{aligned} \frac{D\eta'}{ds}(s) &= \eta''(s) - \frac{\langle \eta''(s), \eta(s) \rangle}{\langle \eta(s), \eta(s) \rangle} \eta(s) = \eta''(s) - c \langle \eta''(s), \eta(s) \rangle \eta(s) \\ &= \eta''(s) + c \langle \eta'(s), \eta'(s) \rangle \eta(s) = \eta''(s) + c\eta(s). \end{aligned}$$

Com isto, segue que

$$\kappa_{g,\eta}(s)^2 = \left\langle \frac{D\eta'}{ds}(s), \frac{D\eta'}{ds}(s) \right\rangle = \langle \eta''(s), \eta''(s) \rangle - 2c + c = \langle \eta''(s), \eta''(s) \rangle - c.$$

Assim, resta mostrar que $\langle \eta''(s), \eta''(s) \rangle = r(s)^2 + c$. Para tal, derivamos a equação (*) e multiplicamos a expressão obtida por $r(s)$, donde

$$\tilde{A}'''(s) - (\log r(s))' \tilde{A}''(s) + (r(s)^2 + c) \tilde{A}'(s) - c(\log r(s))' \tilde{A}(s) = r(s) \Psi'(s) c_2.$$

Projetando nas três coordenadas centrais, temos

$$\eta'''(s) - (\log r(s))' \eta''(s) + (r(s)^2 + c) \eta'(s) - c(\log r(s))' \eta(s) = 0.$$

Com isto:

$$\begin{aligned} \langle \eta'''(s), \eta''(s) \rangle &= -\langle \eta''''(s), \eta'(s) \rangle \\ &= \left\langle -(\log r(s))' \eta''(s) + (r(s)^2 + c) \eta'(s) - c(\log r(s))' \eta(s), \eta'(s) \right\rangle \\ &= r(s)^2 + c, \end{aligned}$$

já que $\langle \eta''(s), \eta'(s) \rangle = \langle \eta'(s), \eta(s) \rangle = 0$ e η é de tipo espaço com velocidade unitária. ■

Com isto, reparametrizando η se necessário, podemos supor que $\kappa_{g,\eta}(s) = r(s)$. Observamos que para $c = -1$ vale que $|\kappa_{g,\eta}| < 1$. Seja $V_\eta(s) \doteq (V_1(s), V_2(s), V_3(s))$ o vetor unitário tangente à $\mathbb{M}^2(c)$ e ortogonal à $\eta'(s)$, que portanto satisfaz $(D\eta'/ds)(s) = r(s)V_\eta(s)$. Logo, temos

$$\eta''(s) = r(s)V_\eta(s) - c\eta(s).$$

Derivando, vem

$$(\log r(s))' \eta''(s) - (r(s)^2 + c) \eta'(s) + c(\log r(s))' \eta(s) = r'(s)V_\eta(s) + r(s)V_\eta'(s) - c\eta'(s).$$

No lado esquerdo substituímos novamente a expressão para $\eta''(s)$ e segue rapidamente que $r(s)\eta'(s) = -V_\eta'(s)$, de modo que

$$\int_0^s r(t)\eta'(t) dt = V_\eta(0) - V_\eta(s).$$

¹⁰Para mais detalhes sobre curvaturas geodésicas e o Triedro de Darboux, veja por exemplo [27].

Como $\langle \boldsymbol{\eta}(s), \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(s) \rangle = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \tilde{\mathbf{A}}(s), \mathbf{c}_1 + \int_0^s r(t) \tilde{\mathbf{A}}'(t) dt \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{\eta}(s), (1, 0, 0) + \int_0^s r(t) \boldsymbol{\eta}'(t) dt \right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\eta}(s), (1, 0, 0) + \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(0) - \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(s) \rangle = \langle \boldsymbol{\eta}(s), (1, 0, 0) + \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(0) \rangle. \end{aligned}$$

Derivando esta expressão duas vezes, concluímos que também vale

$$\langle \boldsymbol{\eta}'(s), (1, 0, 0) + \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(0) \rangle = \langle \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(s), (1, 0, 0) + \mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(0) \rangle = 0,$$

o que nos leva a concluir que $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\eta}}(0) = (-1, 0, 0)$. Finalmente conseguimos escrever

$$\mathbf{c}_1 + \int_0^s r(t) \tilde{\mathbf{A}}'(t) dt = \left(-b + \int_0^s r(t) \ell'(t) dt, -V_1(s), -V_2(s), -V_3(s), -b + \int_0^s r(t) \ell'(t) dt \right),$$

de modo que renomeando $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$, recuperamos os casos (ii) e (v) dos teoremas 3.3.3 e 3.3.4, respectivamente.

- (b) Suponha que $c = -1$ e $|p(u)| < |q(u)|$. Desta vez o Lema 3.3.2 (p. 67) nos permite escrever $e^{\lambda(u,v)} = \alpha(u) \sinh(v + \beta(u))$ para certas funções suaves $\alpha \neq 0$ e β . De modo análogo ao feito no caso (a), se \tilde{u} denota uma primitiva de α , a métrica fica expressa como

$$\sinh^2(v + \gamma(\tilde{u})) d\tilde{u}^2 + dv^2,$$

para uma certa γ suave. Os casos (a₁) e (a₂) se adaptam facilmente. Vejamos *brevemente* como isto ocorre:

- (b₁) Quando γ é constante. Realizando uma translação, expressamos a métrica na forma $\sinh^2(\tilde{v}) d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2$. Resolvendo um sistema análogo à (‡) (com \coth ao invés de \tanh e, portanto, trocando os papéis de A e B), obtemos que

$$\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \cosh \tilde{v} \mathbf{c}_1 + \sinh \tilde{v} \mathbf{B}(\tilde{u}),$$

onde $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}_2^5$ é constante e \mathbf{B} é uma função vetorial em \mathbb{R}_2^5 . Teremos neste caso que

$$x_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = -\sinh \tilde{v} \cosh \tilde{v} x_{\tilde{v}}(\tilde{u}, \tilde{v}) + (\sinh^2 \tilde{v}) (L_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) + \mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})),$$

donde segue que

$$L_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v})) = \frac{\mathbf{B}''(\tilde{u}) + \mathbf{B}(\tilde{u})}{\sinh \tilde{v}}.$$

Aplicar $\bar{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}}$ e re-substituir a expressão para $L_+(\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v}))$ implica então que

$$(\mathbf{B}''(\tilde{u}) + \mathbf{B}(\tilde{u}))' = \psi(\tilde{u})(\mathbf{B}''(\tilde{u}) + \mathbf{B}(\tilde{u})),$$

onde $\psi(\tilde{u}) = \phi(E_1) \sinh \tilde{v}$, que de fato não depende de \tilde{v} . Tal expressão pode ser integrada para $\mathbf{B}''(\tilde{u}) + \mathbf{B}(\tilde{u}) = \Psi(\tilde{u}) \mathbf{c}_2$, onde $\Psi > 0$ e $\mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}_2^5$ é constante. Assim, obtemos

$$\mathbf{B}(\tilde{u}) = \cos \tilde{u} \mathbf{c}_3 + \sin \tilde{u} \mathbf{c}_4 + \left(\sin \tilde{u} \int_0^{\tilde{u}} \Psi(t) \cos t dt - \cos \tilde{u} \int_0^{\tilde{u}} \Psi(t) \sin t dt \right) \mathbf{c}_2,$$

onde \mathbf{c}_3 e \mathbf{c}_4 são outras constantes de integração. Chamamos de $\zeta(\tilde{u})$ o coeficiente de \mathbf{c}_2 (que satisfaz $\zeta'' + \zeta = \Psi > 0$), e assim

$$\mathbf{x}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \cosh \tilde{v} \mathbf{c}_1 + \zeta(\tilde{u}) \sinh \tilde{v} \mathbf{c}_2 + \cos \tilde{u} \sinh \tilde{v} \mathbf{c}_3 + \sin \tilde{u} \sinh \tilde{v} \mathbf{c}_4.$$

Como feito antes, pode-se mostrar que c_1, c_2, c_3 e c_4 são a dois ortogonais, com c_1 unitário de tipo tempo, c_3 e c_4 unitários de tipo espaço, e c_2 de tipo luz. Assim podemos supor que $c_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $c_2 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $c_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ e $c_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$. Renomeando $(\tilde{u}, \tilde{v}) \rightarrow (u, v)$, recuperamos o caso (ii) do Teorema 3.3.4:

$$x(u, v) = (\xi(u) \sinh v, \operatorname{sen} u \sinh v, \cos u \sinh v, \cosh v, \xi(u) \sinh v), \text{ em } \mathbb{H}_1^4.$$

(b₂) Quando γ é não-constante. Imitamos o início do caso (a₂), essencialmente aplicando que $c = -1$ e trocando \tanh por \coth :

$$x(\tilde{u}, v) = \cosh v A(\tilde{u}) + \sinh v \left(c_1 + \int_0^{\tilde{u}} \coth(\gamma(t)) A'(t) dt \right),$$

onde $c_1 \in \mathbb{R}_2^5$ é constante e A é uma função vetorial em \mathbb{R}_2^5 . Notando que desta vez temos $\langle A'(\tilde{u}), A'(\tilde{u}) \rangle = \sinh^2(\gamma(\tilde{u}))$, chamamos s um parâmetro de arco para A , colocamos $\tilde{A} \doteq A \circ \tilde{u}$ e $r(s) \doteq \coth(\gamma(\tilde{u}(s)))$, de modo que a métrica se expressa na forma

$$(\cosh v + r(s) \sinh v)^2 ds^2 + dv^2.$$

Em vista desta expressão, o resto do argumento feito em (a₂) se aplica *diretamente* e reobtemos o caso (v) do Teorema 3.3.4, com a diferença de que o módulo da curvatura geodésica de η agora satisfaz $|\kappa_{g,\eta}| > 1$.

(c) Suponha que $c = -1$ e $|p(u)| = |q(u)|$. Fazendo $\tilde{v} \doteq -v$ e renomeando $\tilde{v} \rightarrow v$ se necessário, podemos supor que $p(u) = q(u)$. Nestas condições, temos

$$e^{\lambda(u,v)} = p(u) \cosh v + p(u) \sinh v = p(u)e^v,$$

de modo que se \tilde{u} é uma primitiva de p , então $e^{2\lambda(u,v)} du^2 + dv^2 = e^{2v} d\tilde{u}^2 + dv^2$. Os únicos Símbolos de Christoffel não nulos são $\Gamma_{\tilde{u}\tilde{u}}^{\tilde{u}} = 1$ e $\Gamma_{\tilde{u}\tilde{u}}^v = -e^{2v}$, e temos

$$\Pi(\partial_{\tilde{u}}, \partial_{\tilde{u}}) = \frac{1}{p(u)^2} \Pi(\partial_u, \partial_u) = \frac{e^{2\lambda(u,v)}}{p(u)^2} \Pi(E_1, E_1) = e^{2v} L_+,$$

donde a Proposição 1.2.34 (p. 33) nos dá

$$\begin{aligned} x_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u}, v) &= -e^{2v} x_v(\tilde{u}, v) + e^{2v} (L_+(x(\tilde{u}, v)) + x(\tilde{u}, v)), \\ x_{\tilde{u}v}(\tilde{u}, v) &= x_{\tilde{u}}(\tilde{u}, v) \quad \text{e} \\ x_{vv}(\tilde{u}, v) &= x(\tilde{u}, v). \end{aligned}$$

As duas últimas equações nos dão diretamente que $x(\tilde{u}, v) = e^v A(\tilde{u}) + \sinh v c_1$, onde temos que $c_1 \in \mathbb{R}_2^5$ constante e A é uma função vetorial em \mathbb{R}_2^5 . Substituindo na expressão para $x_{\tilde{u}\tilde{u}}$, conseguimos isolar $L_+(x(\tilde{u}, v)) = e^{-v} (A''(\tilde{u}) + c_1)$. Visto que

$$\bar{\nabla}_{\partial_{\tilde{u}}} L_+ = \frac{1}{p(u)} \bar{\nabla}_{\partial_u} L_+ = \frac{e^{\lambda(u,v)}}{p(u)} \bar{\nabla}_{E_1} L_+ = e^v \phi(E_1) L_+(x(\tilde{u}, v)) = \phi(E_1) (A''(\tilde{u}) + c_1),$$

segue que $A'''(\tilde{u}) = \psi(\tilde{u}) (A''(\tilde{u}) + c_1)$, onde $\psi(\tilde{u}) \doteq e^v \phi(E_1)$ de fato independe de v . Re-parametrizando, podemos supor que h está definida em um intervalo contendo a origem. Tratamos dois últimos casos:

(c₁) Quando $\psi = 0$. Diretamente temos que $A(\tilde{u}) = c_2 + \tilde{u}c_3 + \tilde{u}^2c_4$, onde $c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}_2^5$ são

novas constantes de integração. Então:

$$x(\tilde{u}, v) = \sinh v c_1 + e^v c_2 + \tilde{u}e^v c_3 + \tilde{u}^2 e^v c_4.$$

Afirmção. Nas condições acima, os produtos entre as constantes de integração são dados por

$$(\langle c_i, c_j \rangle)_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Justificativa: Calculamos diretamente $x(0,0) = c_2$, $x_{\tilde{u}}(0,0) = c_3$ e $x_{\tilde{v}}(0,0) = c_1 + c_2$. Como x possui norma constante e é ortogonal às suas derivadas, temos

$$\langle c_2, c_2 \rangle = -1, \quad \langle c_2, c_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle c_1, c_2 \rangle = 1.$$

Ainda, como a métrica em $(0,0)$ é Euclideana, segue que

$$\langle c_3, c_3 \rangle = 1, \quad \langle c_1, c_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle c_1, c_1 \rangle = 0.$$

Resta descobrirmos os produtos envolvendo c_4 . Para tal, usaremos força bruta: ambos os pontos $x(1,0) = c_2 + c_3 + c_4$ e $x(-1,0) = c_2 - c_3 + c_4$ pertencem à \mathbb{H}_1^4 , donde segue que $\langle c_3, c_4 \rangle = 0$. Com isto, a condição $\langle x(\tilde{u},0), x(\tilde{u},0) \rangle = -1$ lê-se como

$$\tilde{u}^2 \langle c_4, c_4 \rangle + 2 \langle c_2, c_4 \rangle + 1 = 0,$$

para todo $\tilde{u} \neq 0$. Derivando, segue que $\langle c_4, c_4 \rangle = 0$ e, portanto $\langle c_2, c_4 \rangle = -1/2$. Usando que $x_{\tilde{v}}(1,0)$ é de tipo espaço e unitário, segue que $\langle c_1, c_4 \rangle = 0$. ■

Portanto, aplicando uma isometria de \mathbb{H}_1^4 podemos supor que $c_1 = (0,0,-2,-2,0)$, $c_2 = (-1/2,0,1,3/2,0)$, $c_3 = (0,1,0,0,0)$ e $c_4 = (1,0,0,0,1)$, de modo que renomeando $\tilde{u} \rightarrow u$ obtemos o caso (iii) do Teorema 3.3.4:

$$x(u, v) = \left(u^2 e^v - \frac{e^v}{2}, u e^v, e^{-v}, \frac{e^v}{2} + e^{-v}, u^2 e^v \right), \text{ em } \mathbb{H}_1^4.$$

(c2) Quando $\psi \neq 0$. Neste caso integramos $A'''(\tilde{u}) = \psi(\tilde{u})(A''(\tilde{u}) + c_1)$ para $A''(\tilde{u}) = \Psi(\tilde{u})c_2 - c_1$, onde $c_2 \in \mathbb{R}_2^5$ é mais uma constante de integração, e assim resolvemos para

$$A(\tilde{u}) = -\frac{\tilde{u}^2}{2}c_1 + \left(\int_0^{\tilde{u}} \int_0^{t_1} \Psi(t_2) dt_2 dt_1 \right) c_2 + \tilde{u}c_3 + c_4,$$

onde $c_3, c_4 \in \mathbb{R}_2^5$ são as últimas constantes de integração que utilizaremos. Chamando de $\zeta(\tilde{u})$ o coeficiente de c_2 na expressão acima, temos que $\zeta'' \neq 0$ e

$$x(\tilde{u}, v) = \left(-\frac{\tilde{u}^2 e^v}{2} + \sinh v \right) c_1 + \zeta(\tilde{u})e^v c_2 + \tilde{u}e^v c_3 + e^v c_4.$$

Afirmção. Nas condições acima, os produtos entre as constantes de integração são dados por

$$(\langle c_i, c_j \rangle)_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Justificativa: De modo análogo ao anterior, temos $x(0,0) = c_4$, $x_{\tilde{u}}(0,0) = c_3$ e $x_{\tilde{v}}(0,0) = c_1 + c_4$. Como x possui norma constante e é ortogonal às suas derivadas, temos

$$\langle c_4, c_4 \rangle = -1, \quad \langle c_4, c_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle c_4, c_1 \rangle = 1.$$

Utilizando que a métrica em $(0,0)$ é Euclideana, vem que

$$\langle c_3, c_3 \rangle = 1, \quad \langle c_1, c_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle c_1, c_1 \rangle = 0.$$

Faltam os produtos envolvendo c_2 . Nesta etapa, a condição $\zeta''(0) \neq 0$ será essencial, uma vez que $x_{\tilde{u}\tilde{u}}(0,0) = -c_1 + \zeta''(0)c_2$. Derivando a igualdade $\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u},v), x_{\tilde{u}}(\tilde{u},v) \rangle = e^{2v}$ em relação à u , temos $\langle x_{\tilde{u}\tilde{u}}(0,0), x_{\tilde{u}}(0,0) \rangle = 0$, e assim $\langle c_2, c_3 \rangle = 0$. Prosseguindo, derivamos a igualdade $\langle x(\tilde{u},v), x(\tilde{u},v) \rangle = -1$ em relação à \tilde{u} , obtendo $e^{2v} + \langle x(\tilde{u},v), x_{\tilde{u}\tilde{u}}(\tilde{u},v) \rangle = 0$. Avaliando tal expressão em $(0,0)$, segue que $\langle c_2, c_4 \rangle = 0$. Em seguida, derivando $\langle x_{\tilde{u}}(\tilde{u},v), x_v(\tilde{u},v) \rangle = 0$ em relação à \tilde{u} e avaliando em $(0,0)$, segue que $\langle c_1, c_2 \rangle = 0$. Com isto, a condição $\langle x(\tilde{u},0), x(\tilde{u},0) \rangle = -1$ simplifica-se para $\zeta(\tilde{u})^2 \langle c_2, c_2 \rangle = 0$ para todo \tilde{u} , donde $\langle c_2, c_2 \rangle = 0$, como desejado. ■

Deste modo, podemos aplicar uma isometria de \mathbb{H}_1^4 e supor que $c_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $c_2 = (0, 1, 0, 1, 0)$, $c_3 = (0, 0, 1, 0, 0)$ e $c_4 = (0, 0, 0, 0, -1)$, de modo que renomear $\tilde{u} \rightarrow u$ nos recupera o caso (iv) do Teorema 3.3.4:

$$x(u, v) = \left(\sinh v - \frac{u^2 e^v}{2}, \zeta(u) e^v, u e^v, \zeta(u) e^v, \sinh v - \frac{u^2 e^v}{2} - e^v \right), \text{ em } \mathbb{H}_1^4.$$

□

Capítulo 4

Superfícies marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^4 e invariantes por impulsos

Neste capítulo, estudaremos uma certa classe de superfícies w -marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^4 , satisfazendo uma condição adicional de simetria. Na Seção 4.1, definimos o grupo de impulsos que consideraremos, apresentando uma classificação enunciada em [27], a fim de motivar o que se segue. Então, seguindo Haesen e Ortega em [39], registraremos na Seção 4.2 expressões para as curvaturas de superfícies de tipo espaço em \mathbb{L}^4 (aplicando o que foi discutido no Capítulo 1), apresentamos uma representação integral para esta classe de superfícies na Seção 4.3, e listamos uma quantidade razoável de corolários na Seção 4.4. A relevância da técnica que apresentaremos aqui consiste na sua aplicabilidade em outros modelos de espaço-tempo, para grupos de isometrias adequados.

4.1 Impulsos de Lorentz

Iniciamos a discussão apresentando o tipo de simetrias que consideraremos no que se segue:

Definição 4.1.1 (Impulso de Lorentz). Um *impulso de Lorentz* na direção de um vetor unitário $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ é uma transformação de Lorentz $\Lambda \in O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ que fixe ponto a ponto o subespaço $v^\perp \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$.

Observação. Na definição acima, identificamos v com $(v, 0)$ mediante a decomposição usual $\mathbb{L}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_1$. Por exemplo, um impulso de Lorentz na direção de $e_1 \in \mathbb{R}^2$ fixa ponto a ponto o eixo y em \mathbb{L}^3 .

É sabida a seguinte classificação, discutida em [27]:

Teorema 4.1.2. Sejam $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ unitário e $\Lambda \in O_1^{+\uparrow}(n, \mathbb{R})$ um impulso de Lorentz na direção de v . Então existe $\gamma \geq 1$ tal que

$$[\Lambda]_{\text{can}} = B(v, \gamma) \doteq \left(\begin{array}{ccc|c} \text{Id}_{n-1} + (\gamma - 1)vv^\top & & & -v^1\sqrt{-1 + \gamma^2} \\ & & & \vdots \\ & & & -v^{n-1}\sqrt{-1 + \gamma^2} \\ \hline -v^1\sqrt{-1 + \gamma^2} & \dots & -v^{n-1}\sqrt{-1 + \gamma^2} & \gamma \end{array} \right),$$

onde $\text{can} = (e_1, \dots, e_n)$ denota a base canônica de \mathbb{L}^n e $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$.

Como uma consequência deste fato, temos o:

Corolário 4.1.3. Se $\Lambda \in O_1^{+\uparrow}(4, \mathbb{R})$ é um impulso de Lorentz na direção de e_3 , existe $\theta \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ tal que

$$[\Lambda]_{\text{can}} = B_\theta \doteq \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{Id}_2 & & 0 \\ \hline 0 & \cosh \theta & \sinh \theta \\ & \sinh \theta & \cosh \theta \end{array} \right) \equiv \text{Id}_2 \oplus R_\theta^h.$$

Demonstração: O Teorema 4.1.2 acima nos dá $\gamma \geq 1$ tal que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\sqrt{-1 + \gamma^2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1 + \gamma^2} & \gamma \end{pmatrix}.$$

Como $\gamma \geq 1$, basta tomar $\theta \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ tal que $\gamma = \cosh(-\theta) = \cosh \theta$. \square

Isto justifica focarmos nossa atenção no grupo de impulsos $\mathfrak{Imp} \doteq \{B_\theta \in O_1^{+\uparrow}(4, \mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R}\}$. Observe ainda que a aplicação $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto B_\theta \in \mathfrak{Imp}$ é um isomorfismo de grupos de Lie.

Definição 4.1.4. Um subconjunto $S \subseteq \mathbb{L}^4$ é dito *invariante por impulsos* se $B_\theta[S] = S$, para todo impulso de Lorentz $B_\theta \in \mathfrak{Imp}$.

Exemplo 4.1.5. As regiões

$$\mathcal{R}_+ \doteq \{(x, y, z, w) \in \mathbb{L}^4 \mid |w| > |z|, \text{ e } w > 0\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{R}_- \doteq \{(x, y, z, w) \in \mathbb{L}^4 \mid |w| > |z|, \text{ e } w < 0\}$$

são invariantes por impulsos. Note que se R_θ^h denota rotação hiperbólica por θ (como no enunciado do Corolário 4.1.3 acima), então R_θ^h age no plano zw preservando ramos de hipérbolés, com “magnitude” $\theta/2$, conforme a situação abaixo:

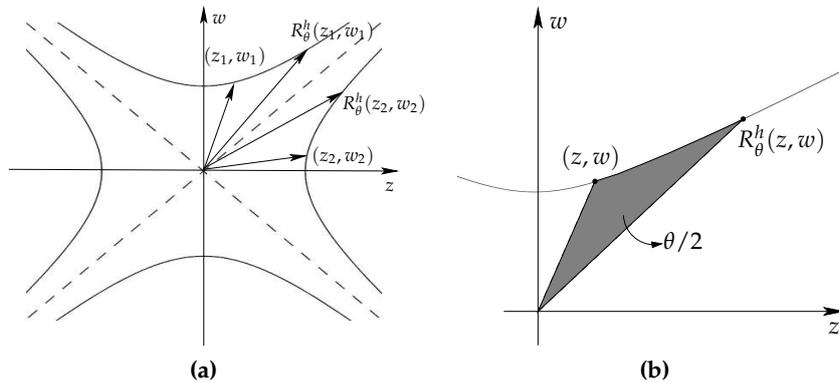


Figura 4.1: A ação de R_θ^h em \mathbb{L}^2 .

A conclusão torna-se clara tendo em mente que o fator \mathbb{R}^2 em $\mathbb{L}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{L}^2$ é invariante por \mathfrak{Imp} , e analisando os zw -cortes \mathcal{R}_+^{zw} e \mathcal{R}_-^{zw} de \mathcal{R}_+ e \mathcal{R}_- , respectivamente:

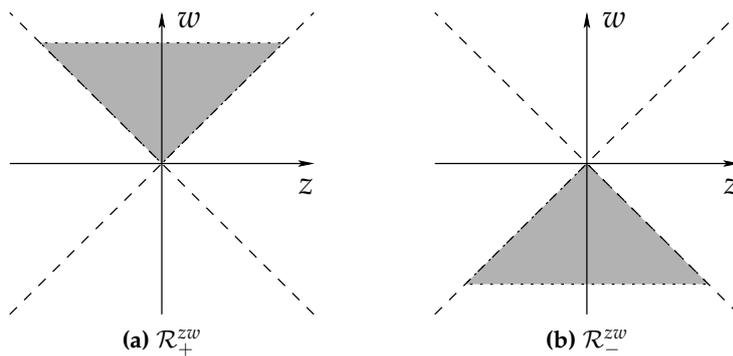


Figura 4.2: Cortes de regiões invariantes por impulsos.

4.2 O aparato para uma superfície invariante

Lema 4.2.1. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície de tipo espaço, invariante por impulsos. Então M está contida em algum dos fechos $\overline{\mathcal{R}_+}$ ou $\overline{\mathcal{R}_-}$.*

Demonstração: Sendo M invariante por impulsos, o zw -corte de M está contido em uma das quatro regiões delimitadas pelos raios de luz $w = z$ e $w = -z$ no plano de Lorentz zw . Como M é de tipo espaço, concluímos que $M \subseteq \overline{\mathcal{R}_+}$ ou $M \subseteq \overline{\mathcal{R}_-}$. \square

Observação. Em [39], os autores afirmam erroneamente que $M \subseteq \mathcal{R}_+$ ou $M \subseteq \mathcal{R}_-$. Há um contra-exemplo simples: $\mathbb{R}^2 \times \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{L}^4$ é uma superfície de tipo espaço e invariante por impulsos. Para evitar situações extremas como esta, e como \mathcal{R}_- é a imagem de \mathcal{R}_+ por uma transformação de Poincaré de \mathbb{L}^4 , podemos restringir nossa atenção apenas às superfícies contidas em \mathcal{R}_+ .

O próximo resultado é de verificação imediata:

Lema 4.2.2. *O conjunto dos pontos fixos da ação de \mathfrak{Imp} em \mathbb{L}^4 é $\{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{L}^4 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.*

Com este resultado, podemos provar a:

Proposição 4.2.3. *Seja $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície de tipo espaço conexa e invariante por impulsos, contida em \mathcal{R}_+ . Então M admite uma parametrização $\mathbf{x}: I \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_\alpha \doteq \mathbf{x}[I \times \mathbb{R}] \subseteq M$ da forma*

$$\mathbf{x}(s, \theta) \doteq B_\theta(\boldsymbol{\alpha}(s)) = (x_\alpha(s), y_\alpha(s), w_\alpha(s) \sinh \theta, w_\alpha(s) \cosh \theta),$$

para algum intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, onde

$$\boldsymbol{\alpha} = (x_\alpha, y_\alpha, 0, w_\alpha): I \rightarrow (e_3^\perp)_+ \doteq \{(x, y, 0, w) \in \mathbb{L}^4 \mid w > 0\}$$

é uma certa geratriz, e a imagem Σ_α é um aberto denso de M . Em particular, $\boldsymbol{\alpha}$ deve ser de tipo espaço.

Observação. Reparametrizando se necessário, podemos supor que $\boldsymbol{\alpha}$ possui velocidade constante, $\langle \boldsymbol{\alpha}'(s), \boldsymbol{\alpha}'(s) \rangle_1 = c^2 > 0$. Sendo este o caso, diremos que \mathbf{x} é a parametrização padrão de M . A demonstração deste resultado é omitida em [39], então a apresentamos a seguir.

Demonstração: Iniciamos o argumento com a:

Afirmção. *Para cada $\mathbf{p} \in M$ existe um único $\theta(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$ tal que $B_{\theta(\mathbf{p})}(\mathbf{p}) \in M \cap (e_3^\perp)_+$ (de modo que, em particular, $M \cap (e_3^\perp)_+ \neq \emptyset$). Ainda, esta associação $\theta: M \rightarrow \mathbb{R}$ é suave.*

Justificativa: Note que dados $(x, y, z, w) \in \mathbb{L}^4$ e $\theta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$B_\theta(x, y, z, w) = (x, y, z \cosh \theta + w \sinh \theta, z \sinh \theta + w \cosh \theta).$$

Se $\mathbf{p} = (x, y, z, w) \in M \subseteq \mathcal{R}_+$, então a equação $z \cosh \theta + w \sinh \theta = 0$ possui uma única solução $\theta(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}$ em vista da condição $|w| > |z|$, a saber, $\theta(\mathbf{p}) = \operatorname{arctanh}(-z/w)$. E finalmente, temos que:

$$\begin{aligned} z \sinh \theta(\mathbf{p}) + w \cosh \theta(\mathbf{p}) &= \cosh \theta(\mathbf{p}) (z \tanh \theta(\mathbf{p}) + w) \\ &= \cosh \theta(\mathbf{p}) \left(-\frac{z^2}{w} + w \right) \\ &= \frac{\cosh \theta(\mathbf{p})}{w} (w^2 - z^2) > 0, \end{aligned}$$

usando que $w > 0$ juntamente com $|w| > |z|$. ■

Assim, afirmo que $M \cap (e_3^\perp)_+$ é conexo. Com efeito, pela afirmação acima temos que a aplicação $f: M \rightarrow \mathbb{L}^4$ definida por $f(\mathbf{p}) = B_{\theta(\mathbf{p})}(\mathbf{p})$ é contínua. É fácil ver que a imagem de f é precisamente a interseção $M \cap (e_3^\perp)_+$, que é então conexa por caminhos (em particular, conexa).

Afirmção. A interseção $M \cap (e_3^\perp)_+$ é uma variedade diferenciável de dimensão 1.

Justificativa: Pelo feito acima, $M \cap (e_3^\perp)_+$ é identificada com o espaço de órbitas $M/\mathcal{I}\text{mp}$. Sendo $\mathcal{I}\text{mp}$ um grupo de Lie de dimensão 1 que age essencialmente nas duas últimas componentes de \mathbb{L}^4 , basta mostrar que a ação do grupo de Lie $O_1^{+\uparrow}(2, \mathbb{R})$ em \mathcal{R}_+^{zw} é suave, própria e livre, uma vez que $M \subseteq \mathcal{R}_+$ e o mesmo valerá para a ação sobre M . Isto garantirá que $M/\mathcal{I}\text{mp}$ é uma variedade diferenciável, com $\dim(M/\mathcal{I}\text{mp}) = \dim M - \dim \mathcal{I}\text{mp} = 2 - 1 = 1$.

Lembrando que $\mathcal{I}\text{mp} \cong O_1^{+\uparrow}(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ como grupos de Lie, podemos estudar apenas a ação de \mathbb{R} em \mathcal{R}_+^{zw} , definida por $\theta \cdot (z, w) \doteq R_\theta^h(z, w)$, que claramente é suave e livre (pelo Lema 4.2.2 acima).

Resta ver que esta ação é própria, ou seja, que dadas sequências $((z_n, w_n))_{n \geq 0} \in \mathcal{R}_+^{zw}$ e $(\theta_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}$ tais que $((z_n, w_n))_{n \geq 0} \in (R_{\theta_n}^h(z_n, w_n))_{n \geq 0}$ ambas converjam (em \mathcal{R}_+^{zw}), então $(\theta_n)_{n \geq 0}$ admite uma subsequência convergente¹. Com efeito, como somas e produtos de sequências limitadas continuam limitadas, segue que

$$((w_n^2 - z_n^2) \sinh \theta_n)_{n \geq 0}$$

é limitada. Visto que o limite de $((z_n, w_n))_{n \geq 0}$ é um elemento de \mathcal{R}_+^{zw} , temos que $(w_n^2 - z_n^2)_{n \geq 0}$ fica eventualmente limitada longe de zero, donde podemos concluir que $(\sinh \theta_n)_{n \geq 0}$ é limitada. Assim $(\theta_n)_{n \geq 0}$ também é limitada e portanto admite uma subsequência convergente, como desejado. ■

Concluimos então que $M \cap (e_3^\perp)_+$ é difeomorfa ao círculo S^1 ou à reta \mathbb{R} , conforme a interseção $M \cap (e_3^\perp)_+$ seja compacta ou não, respectivamente. Podemos tomar uma parametrização global $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 0, w_\alpha): I \rightarrow M \cap (e_3^\perp)_+$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto ou fechado, dependendo do caso. Se $M \cap (e_3^\perp)_+$ é difeomorfa ao círculo, troque I pelo seu interior. Assim, definimos a parametrização

$$x: I \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma_\alpha \doteq x[I \times \mathbb{R}] \subseteq M$$

por $x(s, \theta) = B_\theta(\alpha(s))$, como proposto no enunciado. Se $M \cap (e_3^\perp)_+$ é difeomorfa à \mathbb{R} , $\Sigma_\alpha = M$, enquanto que se $M \cap (e_3^\perp)_+$ é difeomorfa à S^1 , Σ_α é um aberto (próprio) e denso² de M . □

Aplicando a Proposição 1.2.29 (p. 31) e o Corolário 1.2.25 (p. 30), obtemos o:

Lema 4.2.4. Sejam $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície de tipo espaço e $x: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow x[U] \subseteq M$ uma parametrização de M . Suponha que (N_3, N_4) é um referencial ortonormal local e normal à imagem de x , com N_3 de

²É um resultado geral que se G é um grupo de Lie conexo agindo de forma suave e própria numa variedade diferenciável conexa M , então a união das órbitas principais da ação é um aberto denso de M . Veja [28].

tipo tempo. Utilizando a notação clássica da teoria de superfícies,

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s \rangle_1, & F &= \langle \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_\theta \rangle_1, & G &= \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle_1, \\ e_k &= \langle \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{N}_k \rangle_1, & f_k &= \langle \mathbf{x}_{s\theta}, \mathbf{N}_k \rangle_1, & g_k &= \langle \mathbf{x}_{\theta\theta}, \mathbf{N}_k \rangle_1, \end{aligned}$$

valem que:

$$(i) \operatorname{tr}(A_{N_k}) = \frac{Eg_k - 2Ff_k + Ge_k}{EG - F^2}, \text{ para } k = 3, 4.$$

$$(ii) K \circ \mathbf{x} = \frac{-\det(A_{N_3}) + \det(A_{N_4})}{\det(\mathbf{x}^* \langle \cdot, \cdot \rangle_1)} = \frac{-e_3g_3 + e_4g_4 + f_3^2 - f_4^2}{EG - F^2}, \text{ onde } K \text{ denota a curvatura Gaussiana de } M.$$

Mantendo a notação acima, também é conveniente registrarmos como os objetos se expressam em termos de um referencial de Penrose. Seguindo [39], tomamos a constante de normalização sendo -1 , definindo:

$$\mathbf{L}_+ \doteq \frac{\mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_4}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{L}_- \doteq \frac{\mathbf{N}_3 - \mathbf{N}_4}{\sqrt{2}},$$

de acordo com a seguinte ilustração:

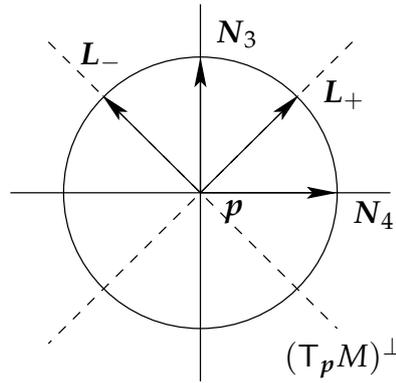


Figura 4.3: Construção de um referencial de Penrose a partir de um referencial ortonormal.

Em termos deste novo referencial, temos:

Lema 4.2.5. *Sejam $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície de tipo espaço e $\mathbf{x}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{x}[U] \subseteq M$ uma parametrização de M . Suponha que $(\mathbf{L}_+, \mathbf{L}_-)$ é um referencial de Penrose (-1) -normalizado, construído como acima. Utilizando a notação clássica da teoria de superfícies,*

$$\begin{aligned} e_+ &= \langle \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{L}_+ \rangle_1, & f_+ &= \langle \mathbf{x}_{s\theta}, \mathbf{L}_+ \rangle_1, & g_+ &= \langle \mathbf{x}_{\theta\theta}, \mathbf{L}_+ \rangle_1, \\ e_- &= \langle \mathbf{x}_{ss}, \mathbf{L}_- \rangle_1, & f_- &= \langle \mathbf{x}_{s\theta}, \mathbf{L}_- \rangle_1, & g_- &= \langle \mathbf{x}_{\theta\theta}, \mathbf{L}_- \rangle_1, \end{aligned}$$

valem que:

$$(i) \operatorname{tr}(A_{L_\pm}) = \frac{Eg_\pm - 2Ff_\pm + Ge_\pm}{EG - F^2}.$$

$$(ii) K \circ \mathbf{x} = \frac{-e_-g_+ + 2f_+f_- - e_+g_-}{EG - F^2}.$$

Concluimos esta seção aplicando isto tudo para obter a:

Proposição 4.2.6. *Sejam $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície de tipo espaço conexa e invariante por impulsos, contida em \mathcal{R}_+ , e \mathbf{x} a sua parametrização padrão. Então:*

- (i) A métrica de \mathbb{L}^4 induzida em M fica expressa em coordenadas apenas por $c^2 ds^2 + (w_\alpha)^2 d\theta^2$;
(ii) Um referencial ortonormal tangente ao longo da imagem Σ_α é dado por

$$E_1(x(s, \theta)) \doteq \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial s}(s, \theta) \quad e \quad E_2(x(s, \theta)) \doteq \frac{1}{w_\alpha(s)} \frac{\partial x}{\partial \theta}(s, \theta).$$

- (iii) Um referencial ortonormal normal ao longo da imagem Σ_α é dado por

$$N_3 \circ x \doteq \frac{1}{c\sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}} (x'_\alpha w'_\alpha, y'_\alpha w'_\alpha, (\sinh \theta)(c^2 + (w'_\alpha)^2), (\cosh \theta)(c^2 + (w'_\alpha)^2))$$

$$N_4 \circ x \doteq \frac{1}{\sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}} (y'_\alpha, -x'_\alpha, 0, 0),$$

omitindo alguns pontos de aplicação. Tem-se N_3 de tipo tempo e futuro-dirigido, e N_4 de tipo espaço.

- (iv) Os coeficientes da Segunda Forma Fundamental são dados por:

$$e_3 = \frac{-cw''_\alpha}{\sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}}, \quad f_3 = 0, \quad g_3 = \frac{-w_\alpha \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}}{c},$$

$$e_4 = \frac{-x'_\alpha y''_\alpha + x''_\alpha y'_\alpha}{\sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}}, \quad f_4 = 0, \quad g_4 = 0.$$

- (v) O vetor curvatura média e curvatura Gaussiana de Σ_α são dados por:

$$H \circ x = \left(\frac{c^2 + (w'_\alpha)^2 + w_\alpha w''_\alpha}{2cw_\alpha \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}} \right) N_3 \circ x + \left(\frac{-x'_\alpha y''_\alpha + x''_\alpha y'_\alpha}{2c^2 \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}} \right) N_4 \circ x \quad e$$

$$K \circ x = -\frac{w''_\alpha}{c^2 w_\alpha}.$$

4.3 Representação de Haesen-Ortega

Neste ponto, estamos de posse de quase todas as ferramentas necessárias para obter uma representação para superfícies invariantes por impulsos que sejam w -marginalmente aprisionadas. Começamos com o seguinte lema técnico:

Lema 4.3.1. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Então existem funções $\varepsilon: I \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ tais que o produto $\varepsilon\rho$ ainda seja suave, e $\varepsilon(s) \neq 0$ para todo $s \in I$ tal que $\rho(s) \neq 0$.*

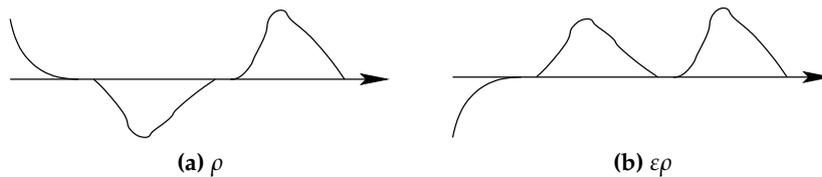


Figura 4.4: Esboço (ruim) da ação de uma função “interruptora” ε .

Demonstração: Suponha que C seja uma componente conexa do interior de $\rho^{-1}[0]$, e $s_0 \in \partial C$. Pela continuidade de ρ , existe $\delta > 0$ tal que

- (i) se C' é outra componente conexa do interior de $\rho^{-1}[0]$, então $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cap C' = \emptyset$ e;

(ii) $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cap C$ é conexo.

Com isto, podemos definir $\varepsilon:]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\cup C \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ tal que

- (i) se $s \in C$, então $\varepsilon(s) = 0$;
- (ii) ε é constante e igual a 1 ou -1 em $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\setminus C$ e;
- (iii) $\varepsilon\rho$ é suave em $C \cup]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$.

A suavidade de ρ nos permite fazer esta construção mesmo quando ρ se anula em outros pontos de $]s_0 - \delta, s_0 + \delta[$, e ε pode ser estendida para todo o intervalo I de modo que $\varepsilon\rho$ continue suave. \square

Observação. Na próxima seção, veremos como “colar” superfícies w -marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^4 , de modo que a superfície resultante também o seja. A utilidade deste lema na realização de tal colagem consiste em alterar de forma suave o sinal de uma dada função ρ , em cada componente conexa de $\mathbb{R} \setminus \rho^{-1}[0]$.

Teorema 4.3.2 (Haesen-Ortega). *Dados $c > 0$ e uma função suave e positiva $w_\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$, definimos*

$$\rho_\alpha \doteq -\frac{c^2 + (w'_\alpha)^2 + w_\alpha w''_\alpha}{w_\alpha}.$$

Escolhendo uma função ε como no Lema 4.3.1 acima, definimos

$$\begin{aligned}\xi_\alpha(s) &= \int \frac{c\varepsilon(s)\rho_\alpha(s)}{c^2 + w'_\alpha(s)^2} ds, \\ x_\alpha(s) &= \int \sqrt{c^2 + w'_\alpha(s)^2} \operatorname{sen}(\xi_\alpha(s)) ds \quad e \\ y_\alpha(s) &= \int \sqrt{c^2 + w'_\alpha(s)^2} \operatorname{cos}(\xi_\alpha(s)) ds.\end{aligned}$$

Então a curva $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 0, w_\alpha)$ é de tipo espaço, possui velocidade constante e igual a c , e é geratriz de uma superfície de tipo espaço Σ_α invariante por impulsos, contida em \mathcal{R}_+ , com vetor curvatura média dado por

$$\mathbf{H}(x(s, \theta)) = \frac{\rho_\alpha(s)}{2c\sqrt{c^2 + w'_\alpha(s)^2}} (-\mathbf{N}_3(x(s, \theta)) + \varepsilon(s)\mathbf{N}_4(x(s, \theta))),$$

onde \mathbf{x} é a parametrização padrão de Σ_α e \mathbf{N}_3 e \mathbf{N}_4 são definidos como na Proposição 4.2.6 (p. 85). Além disto:

- (i) Σ_α é marginalmente aprisionada nos pontos onde $\rho_\alpha \neq 0$, e \mathbf{H} é futuro-dirigido se e somente se $\rho_\alpha < 0$;
- (ii) Σ_α é crítica precisamente nos pontos onde $\rho_\alpha = 0$;
- (iii) dada outra curva de tipo espaço $\beta = (x_\beta, y_\beta, 0, w_\beta)$ com velocidade constante e igual a c e $w_\beta = w_\alpha$, para cada componente conexa C de $\mathbb{R} \setminus \rho_\alpha^{-1}[0]$ existe uma transformação de Poincaré que leva $\Sigma_\alpha|_C$ em $\Sigma_\beta|_C$.

Reciprocamente, toda superfície de tipo espaço conexa, invariante por impulsos e contida em \mathcal{R}_+ , que seja w -marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^4 admite um subconjunto aberto e denso da forma Σ_α , construído como acima, a partir de alguma curva de tipo espaço $\alpha: I \rightarrow (e_3^\perp)_+$.

Demonstração: Dados $\rho_\alpha, \zeta_\alpha, x_\alpha$ e y_α definidos como acima, é fácil ver que α é de tipo espaço e com velocidade constante c . Calculamos

$$\begin{aligned} x'_\alpha(s) &= \frac{w'_\alpha(s)w''_\alpha(s) \operatorname{sen} \zeta_\alpha(s) + c\varepsilon(s)\rho_\alpha(s) \cos \zeta_\alpha(s)}{\sqrt{c^2 + w'_\alpha(s)^2}} \quad \text{e} \\ y'_\alpha(s) &= \frac{w'_\alpha(s)w''_\alpha(s) \cos \zeta_\alpha(s) - c\varepsilon(s)\rho_\alpha(s) \operatorname{sen} \zeta_\alpha(s)}{\sqrt{c^2 + w'_\alpha(s)^2}}, \end{aligned}$$

de modo que a expressão para H agora segue do item (v) da Proposição 4.2.6 (p. 85). De posse desta expressão, os itens (i) e (ii) são triviais.

Para o item (iii), considere outra geratriz β como no enunciado. Claramente α e β determinam a mesma função $\rho = \rho_\alpha = \rho_\beta$. Trabalhemos então em uma componente conexa C de $\mathbb{R} \setminus \rho^{-1}[0]$. Sendo ζ_α e ζ_β as funções ângulo associadas à α e β , tem-se $\zeta'_\alpha = \delta\zeta'_\beta$, onde $\delta \in \{-1, 1\}$ é uma constante conveniente, que depende das funções interruptoras ε associadas à α e β (tais funções são constantes em C). Assim, $\zeta_\alpha = \delta\zeta_\beta + \zeta_0$, onde ζ_0 é uma certa constante de integração. Observando que $\operatorname{sen}(\delta\zeta_\beta) = \delta \operatorname{sen} \zeta_\beta$ e $\cos(\delta\zeta_\beta) = \cos \zeta_\beta$, podemos calcular:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_\alpha \\ y'_\alpha \end{pmatrix} &= \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \zeta_\alpha \\ \cos \zeta_\alpha \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{c^2 + (w'_\beta)^2} \begin{pmatrix} \delta \operatorname{sen} \zeta_\beta \cos \zeta_0 + \cos \zeta_\beta \operatorname{sen} \zeta_0 \\ \cos \zeta_\beta \cos \zeta_0 - \delta \operatorname{sen} \zeta_\beta \operatorname{sen} \zeta_0 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{c^2 + (w'_\beta)^2} \begin{pmatrix} \cos \zeta_0 & \operatorname{sen} \zeta_0 \\ -\operatorname{sen} \zeta_0 & \cos \zeta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \operatorname{sen} \zeta_\beta \\ \cos \zeta_\beta \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{c^2 + (w'_\beta)^2} \begin{pmatrix} \cos \zeta_0 & \operatorname{sen} \zeta_0 \\ -\operatorname{sen} \zeta_0 & \cos \zeta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \zeta_\beta \\ \cos \zeta_\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \zeta_0 & \operatorname{sen} \zeta_0 \\ -\operatorname{sen} \zeta_0 & \cos \zeta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\beta \\ y'_\beta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} x'_\beta \\ y'_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta_0 & -\operatorname{sen} \zeta_0 \\ \operatorname{sen} \zeta_0 & \cos \zeta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\alpha \\ y'_\alpha \end{pmatrix},$$

e portanto

$$\begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta_0 & -\operatorname{sen} \zeta_0 \\ \operatorname{sen} \zeta_0 & \cos \zeta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

para certas constantes de integração $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Isto nos diz que a transformação de Poincaré $F \in E_1(4, \mathbb{R})$ definida por

$$F(x, y, z, w) \doteq \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \zeta_0 & -\operatorname{sen} \zeta_0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \zeta_0 & \cos \zeta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

leva $\alpha|_C$ em $\beta|_C$, e logo $\Sigma_{\alpha|_C}$ em $\Sigma_{\beta|_C}$.

Agora, provemos a recíproca: pela Proposição 4.2.3 (p. 83), podemos supor de partida que a superfície dada é da forma Σ_α para alguma $\alpha = (x_\alpha, y_\beta, 0, w_\alpha): I \rightarrow (e_3^+)_{+}$ de tipo espaço e com velocidade constante c . Da condição $(x'_\alpha)^2 + (y'_\alpha)^2 = c^2 + (w'_\alpha)^2$, temos que

$$x'_\alpha = \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2} \operatorname{sen} \zeta_\alpha \quad \text{e} \quad y'_\alpha = \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2} \cos \zeta_\alpha$$

para uma certa função ângulo ζ_α , de modo que x_α e y_α podem ser recuperados a partir de w_α e ζ_α . Como Σ_α é w -marginalmente aprisionada, vale $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle_1 = 0$, que é equivalente a

$$\left| \frac{c^2 + (w'_\alpha)^2 + w_\alpha w''_\alpha}{2c w_\alpha \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}} \right| = \left| \frac{-x'_\alpha y''_\alpha + x''_\alpha y'_\alpha}{2c^2 \sqrt{c^2 + (w'_\alpha)^2}} \right|.$$

Então analisamos dois casos:

- Σ_α é marginalmente aprisionada em algum ponto: em alguma vizinhança do tal ponto, vale que

$$\rho_\alpha = \varepsilon \left(\frac{-x'_\alpha y''_\alpha + x''_\alpha y'_\alpha}{c} \right)$$

para algum $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Pelo Lema 4.3.1 (p. 86) existe uma função (que também chamaremos de ε) assumindo apenas valores em $\{-1, 0, 1\}$, tal que a identidade em destaque acima vale em Σ_α .

- Σ_α é crítica: podemos tomar $\rho_\alpha = \varepsilon = 0$.

Substituindo as expressões para x''_α e y''_α , obtemos finalmente

$$\zeta'_\alpha = \frac{\varepsilon c \rho_\alpha}{c^2 + (w'_\alpha)^2},$$

como desejado. □

Explorando este resultado, obtemos exemplos:

Exemplo 4.3.3. O Exemplo 2.1.8 (p. 40) é produzido pelo Teorema 4.3.2 acima, com $\rho_\alpha = -3/2$, $c = 1$, $\varepsilon = 1$, $w_\alpha(s) \doteq 1 + s^2/4$, e tomando todas as constantes de integração nulas. Desta vez é claro que

$$\mathbf{H} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{4+s^2}} \mathbf{L}_+ \quad \text{e} \quad K = -\frac{2}{4+s^2}.$$

Exemplo 4.3.4. Dados $c > 0$, $\varepsilon = -1$ e $w_\alpha(s) \doteq c \cosh s$, o Teorema 4.3.2 nos fornece a geratriz $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$ dada por

$$\alpha(s) = (2c \log(\cosh s), 4c \arctan(\tanh(s/2)) - c \sinh s, 0, c \cosh s),$$

de uma superfície Σ_α de tipo espaço, invariante por impulsos, contida em \mathcal{R}_+ e marginalmente aprisionada, com

$$\mathbf{H} = -\frac{2\sqrt{2}}{c} \mathbf{L}_+ \quad \text{e} \quad K = -\frac{1}{c^2}.$$

Exemplo 4.3.5. Para $0 < s < \pi$, consideramos $w_\alpha(s) = \sin s$ e $\varepsilon = 1$. Aplicando o Teorema 4.3.2 temos que a superfície Σ_α obtida é w -marginalmente aprisionada, com $\rho_\alpha(s) = -2 \cos^2 s / \sin s \leq 0$. Temos que

$$\mathbf{H} = \frac{\sqrt{2} \cos^2 s}{\sin s \sqrt{1 + \cos^2 s}} \mathbf{L}_+ \quad \text{e} \quad K = 1.$$

Note que $\rho_\alpha(\pi/2) = 0$.

Corolário 4.3.6. Seja $M^2 \subseteq \mathbb{L}^4$ uma superfície de tipo espaço, invariante por impulsos, contida em \mathcal{R}_+ e crítica. Então M admite um subconjunto aberto e denso da forma Σ_α , onde α é uma geratriz com velocidade unitária e dada por

$$\alpha(s) = \left(\sqrt{a_1} \arctan \left(\frac{s + a_2}{f(s)} \right) \sin \zeta_0 + x_0, \sqrt{a_1} \arctan \left(\frac{s + a_2}{f(s)} \right) \cos \zeta_0 + y_0, 0, f(s) \right),$$

para $f(s) \doteq \sqrt{a_1 - (s + a_2)^2}$ e certas constantes de integração $a_1, a_2, \xi_0, x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, com $a_1 > 0$. Em particular, M está contida em um hiperplano de tipo tempo (ou seja, em um \mathbb{L}^3 totalmente geodésico).

Demonstração: A existência de tal Σ_α está garantida pelo Teorema 4.3.2, de modo que só resta vermos que α (que podemos supor com velocidade unitária) tem a forma desejada, e que Σ_α (e portanto M) está contida em um hiperplano de tipo tempo. Sendo M crítica, temos que $\rho_\alpha = 0$, e assim a função w_α deve satisfazer a equação diferencial

$$1 + (w'_\alpha)^2 + w_\alpha w''_\alpha = 0,$$

cujas soluções positivas são $w_\alpha(s) = f(s) = \sqrt{a_1 - (s + a_2)^2}$, onde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ com $a_1 > 0$. É também fácil ver que a função ângulo é constante: $\xi_\alpha(s) = \xi_0$ para todo s , com $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Deste modo, obtemos:

$$\begin{aligned} x_\alpha(s) &= \int \frac{\sqrt{a_1}}{f(s)} \operatorname{sen} \xi_0 \, ds = \sqrt{a_1} \arctan\left(\frac{s + a_2}{f(s)}\right) \operatorname{sen} \xi_0 + x_0 \quad e \\ y_\alpha(s) &= \int \frac{\sqrt{a_1}}{f(s)} \cos \xi_0 \, ds = \sqrt{a_1} \arctan\left(\frac{s + a_2}{f(s)}\right) \cos \xi_0 + y_0, \end{aligned}$$

para certas constantes de integração $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. O resto da conclusão segue agora de duas observações:

- (i) se x é a parametrização padrão associada à α , tem-se

$$N_4(x(s, \theta)) = (\cos \xi_0, -\operatorname{sen} \xi_0, 0, 0)$$

constante, de modo que $A_{N_4} = 0$;

- (ii) o traço de α está contido no 2-plano Lorentziano afim

$$\Pi = (x_0, y_0, 0, 0) + \{(x, y, z, w) \in \mathbb{L}^4 \mid z = 0 \text{ e } x \cos \xi_0 = y \operatorname{sen} \xi_0\},$$

e as órbitas dos pontos de α sob a ação de $\mathcal{I}mp$ são ortogonais à Π .

□

4.4 Colando superfícies $\mathcal{I}mp$ -invariantes e outras consequências

Neste ponto, apresentamos mais uma “fábrica” de superfícies w -marginalmente aprisionadas. Para complementar o Lema 4.3.1 (p. 86), começamos com o:

Lema 4.4.1 (“Bumps”). *Sejam $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ com $p_1 < q_1 < p_2 < q_2$, e defina*

$$d \doteq \min\{q_1 - p_1, p_2 - q_1, q_2 - p_2\}/4.$$

Então existem funções suaves $\psi_1, \psi_2, \tilde{\psi}:]p_1, q_2[\rightarrow [0, 1]$ tais que:

- (i) $\psi_1(s) = 1$ para $s \in]p_1, q_1 - d[$, e $\psi_1(s) = 0$ para $s \geq q_1$;
- (ii) $\tilde{\psi}(s) = 1$ para $s \in [q_1, p_2]$, e $\tilde{\psi}(s) = 0$ para $s \geq p_2 + d$ ou $s \leq q_1 - d$;
- (iii) $\psi_2(s) = 1$ para $s \in [p_2 + d, q_2[$ e $\psi_2(s) = 0$ para $s \leq p_2$.

Observação.

- Note que como $p_2, q_1 \in \mathbb{R}$, tem-se $p_2 - q_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, e assim $d \in \mathbb{R}$. Então de fato não há complicações nos casos em que $p_1 = -\infty$ e/ou $q_2 = +\infty$.

- Quando $p_1, q_2 \in \mathbb{R}$, temos a seguinte situação:

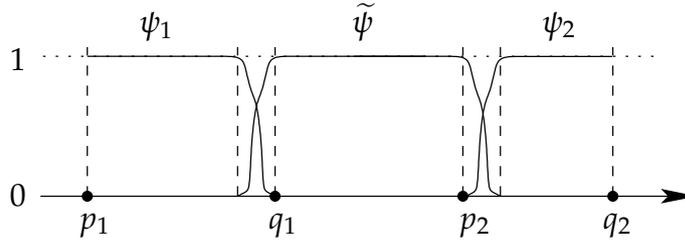


Figura 4.5: Funções solavanco.

Já quando $p_1 = -\infty$ ou $q_2 = +\infty$, os gráficos de ψ_1 e ψ_3 apenas continuam até os respectivos infinitos.

Demonstração: Basta fazer uma mudança de parâmetros adequada (digamos, afim) na função “bump” usual ψ , cuja construção recordamos brevemente, em passos:

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = e^{-1/s}$ para $s > 0$ e $f(s) = 0$ para $s \leq 0$ é suave;
- (2) $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tilde{f}(s) \doteq f(s)/(f(s) + f(1-s))$ é suave, e satisfaz $\tilde{f}(s) = 0$ para $s < 0$ e $\tilde{f}(s) = 1$ para $s > 1$;
- (3) $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\psi(s) \doteq \tilde{f}(s+2)\tilde{f}(2-s)$ é suave, e satisfaz $\psi(s) = 1$ para $|s| \leq 1$ e $\psi(s) = 0$ para $|s| \geq 2$.

□

Teorema 4.4.2. *Sejam E um conjunto enumerável, $\{I_k\}_{k \in E}$ uma família de intervalos abertos limitados da reta, e $\{\alpha_k: I_k \rightarrow (e_3^\perp)_+\}_{k \in E}$ uma família de curvas de tipo espaço com velocidade unitária tal que para cada $k \in E$, Σ_{α_k} seja uma superfície de tipo espaço invariante por impulsos, w -marginamente aprisionada. Então existe uma superfície w -marginamente aprisionada da forma Σ_β tal que para cada $k \in E$ existem um subconjunto aberto C_k do domínio de β e uma transformação de Poincaré F_k de \mathbb{L}^4 que leva Σ_{α_k} em $\Sigma_\beta|_{C_k}$.*

Demonstração: Vamos descrever a colagem de duas superfícies, sendo que a generalização para uma quantidade enumerável não oferece dificuldades.

Consideremos duas curvas de tipo espaço e com velocidade unitária $\alpha_1:]p_1, q_1[\rightarrow (e_3^\perp)_+$ e $\alpha_2:]p_2, q_2[\rightarrow (e_3^\perp)_+$, cujas superfícies invariantes associadas Σ_{α_1} e Σ_{α_2} sejam w -marginamente aprisionadas. Reparametrizando tais geratrizes se necessário, podemos supor que

$$-\infty \leq p_1 < q_1 < p_2 < q_2 \leq +\infty.$$

Sendo d como no Lema 4.4.1 acima, ponha $m_1 = \frac{p_2+q_1}{2}$ e $m_2 = \frac{p_2+2d-q_1}{2}$. Aplicando o Corolário 4.3.6 (p. 89), consideramos a curva $\tilde{\alpha}:]q_1-d, p_2+d[\rightarrow (e_3^\perp)_+$ geratriz de uma superfície crítica e invariante $\Sigma_{\tilde{\alpha}}$, com $w_{\tilde{\alpha}}(s) = \sqrt{m_2^2 - (s+m_1)^2}$ e $\xi_0 = 0$.

Tomando $\psi_1, \psi_2, \tilde{\psi}$ como no Lema 4.4.1, definimos

$$w_\beta \doteq \psi_1 w_{\alpha_1} + \tilde{\psi} w_{\tilde{\alpha}} + \psi_2 w_{\alpha_2},$$

que claramente é suave e positiva. Além disto, temos

$$w_\beta|_{]p_1, q_1-d[} = w_{\alpha_1}, \quad w_\beta|_{]q_1, p_2+[} = w_{\tilde{\alpha}} \quad \text{e} \quad w_\beta|_{]p_2+d, q_2+[} = w_{\alpha_2}$$

e, conseqüentemente:

$$\rho_\beta|_{]p_1, q_1-d[} = \rho_{\alpha_1}, \quad \rho_\beta|_{]q_1, p_2[} = 0 \quad \text{e} \quad \rho_\beta|_{]p_2+d, q_2[} = \rho_{\alpha_2}.$$

Para construir a curva β utilizando o Teorema 4.3.2 (p. 87) só precisamos de mais um dado: a função ângulo ζ_β . Para tal, sejam ε_{α_1} e ε_{α_2} as funções interruptoras associadas à α_1 e α_2 , e ponha

$$\varepsilon_\beta(s) \doteq \begin{cases} \varepsilon_{\alpha_1}(s), & \text{se } s \in]p_1, q_1[\\ 0, & \text{se } s \in]q_1, p_2[\\ \varepsilon_{\alpha_2}(s), & \text{se } s \in]p_2, q_2[. \end{cases}$$

Como esperado, tem-se $\varepsilon_\beta \rho_\beta$ suave. Sendo

$$\zeta_\beta(s) = \int \frac{\varepsilon_\beta(s) \rho_\beta(s)}{1 + w'_\beta(s)^2} ds,$$

a superfície Σ_β gerada é w -marginalmente aprisionada. Em vista das observações sobre as restrições de w_β e ρ_β , o item (iii) do Teorema 4.3.2 nos dá transformações de Poincaré que levam Σ_{α_1} em $\Sigma_\beta|_{]p_1, q_1-d[}$ e Σ_{α_2} em $\Sigma_\beta|_{]p_2-d, q_2[}$, como desejado.

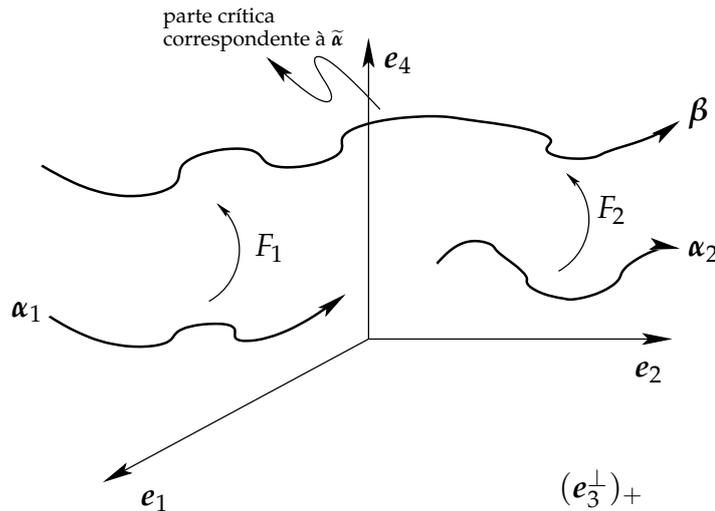


Figura 4.6: Colagem de geratrizes de superfícies w -marginalmente aprisionadas.

□

Ilustremos a construção descrita acima com um:

Exemplo 4.4.3. Pode-se considerar $\alpha_1:]-\infty, -1[\rightarrow (e_3^\perp)_+$ e $\alpha_2:]1, +\infty[\rightarrow (e_3^\perp)_+$, dadas por

$$\begin{aligned} \alpha_1(s) &= (-3\sqrt{1+s^2}, -s\sqrt{1+s^2} + 2 \operatorname{arcsenh} s, 0, 1+s^2) \\ \alpha_2(s) &= (3\sqrt{1+s^2}, -s\sqrt{1+s^2} + 2 \operatorname{arcsenh} s, 0, 1+s^2). \end{aligned}$$

A curva $\tilde{\alpha}:]-2, 2[\rightarrow (e_3^\perp)_+$ que realizará a colagem é dada por

$$\tilde{\alpha}(s) = (0, 2 \operatorname{arcsen}(s/2), 0, \sqrt{4-s^2}),$$

que é geratriz de uma superfície crítica Σ_α . De fato temos

$$\rho_{\alpha_1}(s) = \rho_{\alpha_2}(s) = -\frac{6s^2 + 3}{1 + s^2} < 0 \quad \text{e} \quad \rho_{\tilde{\alpha}} = 0.$$

Tomamos $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = 1$ para realizar a colagem. Concluimos com duas observações:

- Tomamos $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = 1$ pois os vetores curvatura média H_1 e H_2 de Σ_{α_1} e Σ_{α_2} são futuro-dirigidos. Se ρ_{α_2} fosse positivo, tomaríamos $\varepsilon_{\alpha_2} = -1$ para garantir que o vetor curvatura média da superfície Σ_β obtida fosse sempre futuro-dirigido nos pontos em que fosse não-nulo.
- A forma explícita de β em $] -2, -1[\cup] 1, 2[$ dependerá do modo como as funções ψ_1, ψ_2 e $\tilde{\psi}$ decaem, que pode ser complicado. Vide Figura 4.5 (p. 91).

Procedemos então a obter mais corolários do Teorema 4.3.2:

Corolário 4.4.4. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}$ suave. Dado $s_0 \in I$, existem $\delta > 0$ e uma curva de tipo espaço com velocidade unitária $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 0, w_\alpha):]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\rightarrow (e_3^\perp)_+$ tais que a superfície w -marginalmente aprisionada Σ_α gerada por α (com parametrização padrão x) possui curvatura Gaussiana dada por $K(x(s, \theta)) = \kappa(s)$, para todos $(s, \theta) \in]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\times \mathbb{R}$. Ademais:*

- A superfície Σ_α é marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^4 nos pontos onde $1 + (w'_\alpha)^2 - \kappa w_\alpha^2 \neq 0$. Em tais pontos, o vetor curvatura média é futuro-dirigido se e somente se $\kappa < (1 + (w'_\alpha)^2) / w_\alpha^2$.
- A superfície Σ_α é crítica nos pontos onde $1 + (w'_\alpha)^2 - \kappa w_\alpha^2 = 0$.

Demonstração: Tendo em mente o item (v) da Proposição 4.2.6 (p. 85), basta tomar uma solução positiva $w_\alpha:]s_0 - \delta, s_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ da equação diferencial $w''_\alpha + \kappa w_\alpha = 0$. Tomando ε constante e igual a 1, a existência de de uma geratriz α com as propriedades desejadas segue do Teorema 4.3.2 (p. 87). Concluimos notando que $\rho_\alpha < 0$ é equivalente à $\kappa < (1 + (w'_\alpha)^2) / w_\alpha^2$. \square

Corolário 4.4.5. *Não existem superfícies de tipo espaço em \mathbb{L}^4 invariantes por impulsos, críticas e com curvatura Gaussiana constante.*

Demonstração: Suponha por absurdo que M seja uma superfície nas condições do enunciado, com curvatura Gaussiana constante K . Pelo Corolário 4.4.4 acima, M admite um subconjunto aberto e denso da forma Σ_α , com a última coordenada da geratriz α satisfazendo a equação $1 + (w'_\alpha)^2 - K w_\alpha^2 = 0$ num aberto, o que em particular implica que $K > 0$. Como K é constante, $w''_\alpha + K w_\alpha = 0$ implica que $w_\alpha(s) = a_1 \cos(\sqrt{K}s + a_2)$, para certas constantes de integração $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Mas esta solução só satisfaz a primeira condição dada em pontos isolados, nos dando a contradição procurada. \square

Corolário 4.4.6. *Uma superfície marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^4 da forma Σ_α possui curvatura Gaussiana nula se e somente se, a menos de uma transformação de Poincaré, a sua geratriz com velocidade unitária $\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, 0, w_\alpha)$ é dada por*

(i)

$$\begin{aligned} x_\alpha(s) &= \frac{a_1 s + a_2}{\sqrt{1 + a_1^2}} \left(\varepsilon(s) \cos \left(-\varepsilon(s) \frac{\log(a_1 s + a_2)}{a_1} + \zeta_0 \right) + a_1 \sin \left(-\varepsilon(s) \frac{\log(a_1 s + a_2)}{a_1} + \zeta_0 \right) \right), \\ y_\alpha(s) &= \frac{a_1 s + a_2}{\sqrt{1 + a_1^2}} \left(-\varepsilon(s) \sin \left(-\varepsilon(s) \frac{\log(a_1 s + a_2)}{a_1} + \zeta_0 \right) + a_1 \cos \left(-\varepsilon(s) \frac{\log(a_1 s + a_2)}{a_1} + \zeta_0 \right) \right) \quad e \\ w_\alpha(s) &= a_1 s + a_2 > 0, \end{aligned}$$

onde $a_1, a_2, \zeta_0 \in \mathbb{R}$ são constantes de integração, com $a_1 \neq 0$, e ε é uma função como no Lema 4.3.1 (p. 86). Neste caso, se x é a parametrização padrão associada, tem-se

$$\mathbf{H}(x(s, \theta)) = -\frac{\sqrt{1+a_1^2}}{2(a_1s+a_2)}(-N_3(x(s, \theta)) + \varepsilon(s)N_4(x(s, \theta))),$$

ou;

(ii)

$$\begin{aligned} x_\alpha(s) &= \varepsilon(s)a_2 \cos\left(\frac{-\varepsilon(s)s}{a_2} + \zeta_0\right) \\ y_\alpha(s) &= -\varepsilon(s)a_2 \operatorname{sen}\left(\frac{-\varepsilon(s)s}{a_2} + \zeta_0\right) \quad e \\ w_\alpha(s) &= a_2 > 0, \end{aligned}$$

onde $a_2, \zeta_0 \in \mathbb{R}$ são constantes de integração, com $a_2 > 0$, e ε é uma função como no Lema 4.3.1 (p. 86). Neste caso, se x é a parametrização padrão associada, tem-se

$$\mathbf{H}(x(s, \theta)) = -\frac{1}{2a_2}(-N_3(x(s, \theta)) + \varepsilon(s)N_4(x(s, \theta))).$$

Observação. Em [39], os autores não tratam o caso $a_1 = 0$ que discutiremos abaixo.

Demonstração: Sendo $K = 0$, claramente temos $w_\alpha(s) = a_1s + a_2$ para certos $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ onde w_α seja positiva. Tratemos dois casos:

(i) Suponha que $a_1 \neq 0$. Temos também que $\sqrt{1+w'_\alpha(s)^2} = \sqrt{1+a_1^2}$. E pelo Lema 4.3.1 (p. 86), existe uma função interruptora ε de modo que

$$\zeta_\alpha(s) = \int -\frac{\varepsilon(s)}{a_1s+a_2} ds = -\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0,$$

para algum $\zeta_0 \in \mathbb{R}$. Com isto, calculamos

$$\begin{aligned} x_\alpha(s) &= \int \sqrt{1+a_1^2} \operatorname{sen}\left(-\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0\right) ds \\ &= \frac{a_1s+a_2}{\sqrt{1+a_1^2}} \left(\varepsilon(s) \cos\left(-\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0\right) + a_1 \operatorname{sen}\left(-\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0\right) \right) \quad e \\ y_\alpha(s) &= \int \sqrt{1+a_1^2} \cos\left(-\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0\right) ds \\ &= \frac{a_1s+a_2}{\sqrt{1+a_1^2}} \left(-\varepsilon(s) \operatorname{sen}\left(-\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0\right) + a_1 \cos\left(-\varepsilon(s)\frac{\log(a_1s+a_2)}{a_1} + \zeta_0\right) \right) \end{aligned}$$

A expressão para o vetor curvatura média segue diretamente do Teorema 4.3.2.

(ii) Suponha que $a_1 = 0$. De modo análogo ao feito acima, temos $\zeta_\alpha(s) = -\varepsilon(s)s/a_2 + \zeta_0$, e daí

$$\begin{aligned} x_\alpha(s) &= \int \operatorname{sen}\left(-\frac{\varepsilon(s)s}{a_2} + \zeta_0\right) ds = \varepsilon(s)a_2 \cos\left(-\frac{\varepsilon(s)s}{a_2} + \zeta_0\right) \quad e \\ y_\alpha(s) &= \int \cos\left(-\frac{\varepsilon(s)s}{a_2} + \zeta_0\right) ds = -\varepsilon(s)a_2 \operatorname{sen}\left(-\frac{\varepsilon(s)s}{a_2} + \zeta_0\right). \end{aligned}$$



“Ser no entanto essa cavidade,
Mas esses dois longos traçados

Que nunca terminam
De ainda não ser
Retas que sejam retas.

Saber que isso deve
Levar ao infinito,

Que é bem uma fábula,
Um país perdido.

- Ser assintótico
Frente ao infinito?”

Eugène Guillevic (1907–1997)
“Hyperbole” (Euclidiennes)

Apêndice A

Curvas de tipo luz e semi-luz em \mathbb{L}^3

A.1 Referenciais de Cartan e o Teorema Fundamental

No Teorema 2.2.4 (p. 47), vimos que as subvariedades marginalmente aprisionadas do espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 são precisamente as curvas de tipo espaço (localmente) contidas em planos de tipo luz. Com efeito, se α' possui velocidade unitária, temos que $\Pi(\alpha', \alpha') = H \circ \alpha$, de modo que uma curva é marginalmente aprisionada se e somente se possui Segunda Forma Fundamental de tipo luz em todos os pontos.

Neste apêndice, mostraremos que tais curvas podem ser caracterizadas por um único invariante. Isto é análogo ao chamado *Teorema Fundamental das Curvas* estudado na teoria clássica de curvas e superfícies em \mathbb{R}^3 . Tal resultado utiliza dois invariantes (*curvatura* e *torção*) para classificar totalmente as curvas em \mathbb{R}^3 , a menos de isometrias.

Em \mathbb{L}^3 , para uma certa classe de curvas, recuperamos esta classificação. Fixe de uma vez por todas, neste apêndice, um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$. Todas as curvas aqui serão supostas suaves, como de praxe.

Definição A.1.1. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada. Diremos que α é *admissível* se:

- (i) α é *bi-regular*, ou seja, $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ é linearmente independente para todo $t \in I$.
- (ii) ambos $\alpha'(t)$ e $\text{span}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ não são de tipo luz, qualquer que seja $t \in I$.

Observação. Note que esta definição faz sentido em \mathbb{R}^3 e, neste contexto, toda curva com velocidade unitária que não seja uma reta é automaticamente admissível. Deste modo, supor que todas as curvas a serem estudadas são admissíveis não é realmente uma hipótese muito forte.

Para tais curvas, definem-se um *Triedro de Frenet-Serret* $(\mathbf{T}_\alpha(t), \mathbf{N}_\alpha(t), \mathbf{B}_\alpha(t))$ em cada ponto $\alpha(t)$, uma curvatura κ_α e uma torção τ_α , como na teoria usual. E daí temos o:

Teorema A.1.2 (Teorema Fundamental para Curvas Admissíveis). *Sejam $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, com κ positiva, $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{L}^3$, $s_0 \in I$ e $(\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$ uma base ortonormal positiva de \mathbb{L}^3 . Então existe uma única curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ admissível e com velocidade unitária tal que*

- $\alpha(s_0) = \mathbf{p}_0$;
- $(\mathbf{T}_\alpha(s_0), \mathbf{N}_\alpha(s_0), \mathbf{B}_\alpha(s_0)) = (\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$;
- $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ e $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$, para todo $s \in I$.

Detalhes da construção do Triedro de Frenet-Serret para curvas admissíveis e uma demonstração deste resultado encontram-se no Capítulo 2 de [27].

As curvas que são marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^3 claramente não estão contempladas nesta versão do Teorema Fundamental. Sendo assim, faz-se necessária uma nova construção análoga, para tais curvas. O tratamento de certas curvas de tipo luz pode ser incluso no que faremos a seguir sem maiores dificuldades. Para isso, começamos registrando um fato geral:

Proposição A.1.3 (Arco-fóton). *Sejam $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade Lorentziana e $\alpha: I \rightarrow M$ uma curva de tipo luz tal que $\|(D\alpha'/dt)(t)\| \neq 0$ para todo $t \in I$. Então α admite uma reparametrização por arco-fóton, ou seja, existem um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $h: J \rightarrow I$ tal que $\tilde{\alpha} \doteq \alpha \circ h$ satisfaz $\|(D\tilde{\alpha}'/d\phi)(\phi)\| = 1$ para todo $\phi \in J$.*

Demonstração: Uma tal função h deve satisfazer $\tilde{\alpha}(\phi) = \alpha(h(\phi))$, para todo ϕ em algum intervalo aberto, de modo que podemos derivar tal expressão duas vezes, obtendo

$$\frac{D\tilde{\alpha}'}{d\phi}(\phi) = \frac{D\alpha'}{dt}(h(\phi))h'(\phi)^2 + \alpha'(h(\phi))h''(\phi).$$

Como α é de tipo luz, temos que $(D\alpha'/dt)(h(\phi))$ e $\alpha'(h(\phi))$ são sempre ortogonais. Ainda, sendo M Lorentziana, a condição $\|(D\alpha'/dt)(h(\phi))\| \neq 0$ nos diz que $(D\alpha'/dt)(h(\phi))$ é sempre de tipo espaço. Assim, aplicando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na equação acima, obtemos

$$1 = \left\langle \frac{D\alpha'}{dt}(h(\phi)), \frac{D\alpha'}{dt}(h(\phi)) \right\rangle h'(\phi)^4,$$

e portanto $h'(\phi) = \|(D\alpha'/dt)(h(\phi))\|^{-1/2}$. Esta é uma equação diferencial de primeira ordem que depende continuamente de h , de modo que fixados $\phi_0 \in J$ e $t_0 \in I$, existe uma única solução satisfazendo $h(\phi_0) = t_0$. Garantida a existência de h , podemos utilizá-la para definir $\tilde{\alpha}$ com as propriedades desejadas. \square

Observação. Do mesmo modo que ocorre para parâmetros comprimento de arco, mostra-se que se ϕ_1 e ϕ_2 são parâmetros de arco-fóton para uma dada curva de tipo luz α , então vale que $\phi_1(t) = \pm\phi_2(t) + a$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

No que se segue, eventualmente utilizaremos os produtos de \mathbb{R}^3 e \mathbb{L}^3 simultaneamente. Seguiremos a notação adotada em [27], denotando objetos Euclidianos e Lorentzianos com índices E e L , respectivamente (por exemplo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ e \times_L).

Exemplo A.1.4. Considere a hélice $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) \doteq (r \cos t, r \sin t, rt)$, onde $r > 0$. Claramente o vetor $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, r)$ é de tipo luz para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que α é uma curva de tipo luz. Ainda, $\alpha''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$ satisfaz $\|\alpha''(t)\|_L = r$, e assim é possível encontrar um parâmetro arco-fóton para α . Basta então resolver a simples equação diferencial $h'(\phi) = 1/\sqrt{r}$. Assim, $\tilde{\alpha}$ definida por

$$\tilde{\alpha}(\phi) \doteq \left(r \cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), r \sin \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), \sqrt{r}\phi \right)$$

é uma reparametrização de α por arco-fóton.

Observação. Em vista da Proposição A.1.3 acima, suporemos também daqui em diante, que:

- (a) todas as curvas tratadas são bi-regulares (em particular, estamos excluindo o caso em que α é um raio de luz);
- (b) todas as curvas estão parametrizadas com velocidade unitária ou por arco-fóton.

Definição A.1.5. Uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ com velocidade unitária é dita de tipo *semi-luz* se o plano osculador $\text{span} \{ \alpha'(s), \alpha''(s) \}$ de α é degenerado (e, portanto, $\alpha''(s)$ é de tipo luz) para todo $s \in I$.

Note que toda curva de tipo semi-luz é necessariamente de tipo espaço. Veremos adiante (no Teorema A.1.15, p. 104) que as imagens de tais curvas são precisamente as subvariedades marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^3 . Para este fim, precisamos de um referencial conveniente:

Definição A.1.6. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. Definimos os vetores *tangente* e *normal* à α por

$$\mathbf{T}_\alpha \doteq \alpha' \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_\alpha \doteq \alpha'',$$

respectivamente.

Para organizar a discussão, não escreveremos os parâmetros s ou ϕ explicitamente (a fim de tratar os casos luz e semi-luz simultaneamente). Além disto, decretando que indicadores de vetores de tipo luz são zero (e portanto estendendo a Definição 1.1.2, p. 8), introduzimos a seguinte definição:

Definição A.1.7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo causal constante.

- (i) O *indicador* de α é definido por $\epsilon_\alpha \doteq \epsilon_{\mathbf{T}_\alpha(t)}$;
- (ii) O *co-indicador* de α é definido por $\eta_\alpha \doteq \epsilon_{\mathbf{N}_\alpha(t)}$;

Ou seja, uma curva de tipo luz satisfaz $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (0, 1)$ e uma curva de tipo semi-luz satisfaz $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (1, 0)$. Buscamos um terceiro vetor \mathbf{B}_α , de tipo luz, tal que a base $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$ de \mathbb{L}^3 seja pelo menos positiva. Como esperado, chamaremos \mathbf{B}_α de *vetor binormal* à α . Para encontrá-lo, precisamos do conceito de orientabilidade para planos de tipo luz. Recorde que um vetor $v \in \mathbb{L}^n$ de tipo tempo ou luz é *futuro-dirigido* (resp. *passado-dirigido*) se $\langle v, e_n \rangle_L < 0$ (resp. $\langle v, e_n \rangle_L > 0$), onde $e_n = (0, \dots, 1)$ é o último vetor da base canônica.

Em geral, podemos definir a orientação de uma base (v, w) de um plano degenerado em termos de uma escolha de um vetor n euclideanamente normal ao plano. Mais precisamente, diremos que (v, w) é *positiva* se (v, w, n) é uma base positiva de \mathbb{L}^3 , para n futuro-dirigido. Se v é de tipo luz e w é unitário, temos que $v \times_L w$ é de tipo luz e paralelo à v . Escrevendo $v \times_L w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, analisamos o sinal de λ como se segue:

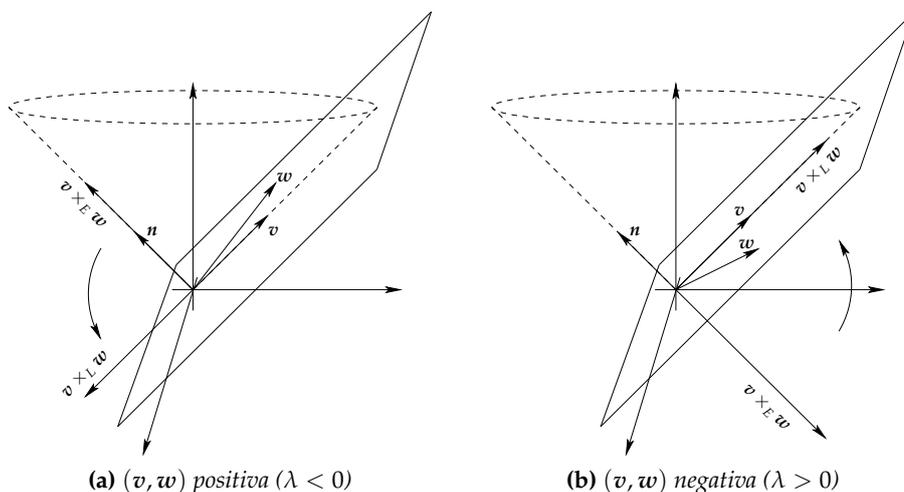


Figura A.1: Orientações de um plano degenerado.

Deste modo, se (v, w) é positiva então $\lambda < 0$ e, analogamente, se (v, w) é negativa temos $\lambda > 0$.

Voltando à construção da base $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$: podemos supor, a menos de uma reparametrização, que a base $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha)$ é positiva. Nesse caso, para determinar o vetor \mathbf{B}_α , que será de tipo luz, precisamos saber também os valores de $\langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L$ e $\langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L$. Em vista da discussão acima, um destes valores deve ser 0 (para ser ortogonal ao vetor de tipo espaço) e o outro -1 (para ser linearmente independente com o vetor de tipo luz). Qual será zero e qual será -1 naturalmente dependerá do tipo causal da curva α . Escolhendo \mathbf{B}_α tal que $\langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L = -\eta_\alpha$ e $\langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L = -\epsilon_\alpha$ tratamos ambos os casos simultaneamente, e daí temos a:

Proposição A.1.8. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. A tripla $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$ é uma base positiva de \mathbb{L}^3 .*

Demonstração: Devemos mostrar que $\det(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) > 0$. Faremos aqui apenas o caso $\epsilon_\alpha = 0$ e $\eta_\alpha = 1$, sendo o outro análogo.

Escrevendo $\mathbf{B}_\alpha(\phi)$ na base $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi))$, vemos que a única componente de $\mathbf{B}_\alpha(\phi)$ relevante para o determinante pedido é a na direção de $\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi)$, digamos que seja $\mu(\phi)\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi)$. Daí temos

$$\det(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{B}_\alpha(\phi)) = \mu(\phi) \underbrace{\det(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi))}_{>0},$$

de modo que só nos resta verificar que $\mu(\phi) > 0$. A discussão ilustrada pela Figura A.1 nos diz que $\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_L \mathbf{N}_\alpha(\phi) = \lambda(\phi)\mathbf{T}_\alpha(\phi)$ para um certo $\lambda(\phi) < 0$ (pois a base $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi))$ é positiva). Aplicando $\text{Id}_{2,1}$ nesta igualdade segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi) &= \text{Id}_{2,1}(\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_L \mathbf{N}_\alpha(\phi)) = \lambda \text{Id}_{2,1}\mathbf{T}_\alpha(\phi) \implies \\ &\implies \langle \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi), \text{Id}_{2,1}\mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_E < 0. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\mathbf{T}_\alpha(\phi)$ e $\mathbf{N}_\alpha(\phi)$ são Lorentz-ortogonais a $\mathbf{T}_\alpha(\phi)$, vale que

$$-1 = \langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L = \mu(\phi) \langle \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi), \text{Id}_{2,1}\mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_E,$$

e concluímos que $\mu(\phi) > 0$. □

Assim, o referencial $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$ é chamado *referencial de Cartan* da curva α .

Geometricamente, quando a curva é de tipo luz, a situação é a seguinte: o vetor $\mathbf{N}_\alpha(\phi)$ é de tipo espaço, e portanto seu complemento ortogonal é um plano de tipo tempo que corta o cone de luz em dois raios de luz, um deles na direção de $\mathbf{T}_\alpha(\phi)$. Assim, o vetor binormal está na direção do outro raio de luz em $\mathbf{N}_\alpha(\phi)^\perp$, sendo determinado pela equação $\langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L = -1$. Uma interpretação análoga vale quando a curva é de tipo semi-luz.

Naturalmente, estamos interessados em saber como um dado vetor se escreve em termos do referencial de Cartan, de forma análoga à expansão ortonormal (Lema 1.1.7, p. 10):

Lema A.1.9. *Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ e $v \in \mathbb{L}^3$. Então:*

(i) *se α é de tipo luz, temos*

$$v = -\langle v, \mathbf{B}_\alpha(\phi) \rangle_L \mathbf{T}_\alpha(\phi) + \langle v, \mathbf{N}_\alpha(\phi) \rangle_L \mathbf{N}_\alpha(\phi) - \langle v, \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L \mathbf{B}_\alpha(\phi),$$

para todo $\phi \in I$;

(ii) *se α é de tipo semi-luz, temos*

$$v = \langle v, \mathbf{T}_\alpha(s) \rangle_L \mathbf{T}_\alpha(s) - \langle v, \mathbf{B}_\alpha(s) \rangle_L \mathbf{N}_\alpha(s) - \langle v, \mathbf{N}_\alpha(s) \rangle_L \mathbf{B}_\alpha(s),$$

para todo $s \in I$.

Demonstração: Trataremos ambos os casos de uma vez, notando que $\epsilon_\alpha^n = \epsilon_\alpha$, $\eta_\alpha^n = \eta_\alpha$ para todo $n \geq 1$, $\epsilon_\alpha \eta_\alpha = 0$ e $\epsilon_\alpha + \eta_\alpha = 1$, sempre. Estas observações seguem do fato de que as únicas possibilidades são $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (1, 0)$ e $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (0, 1)$. Recorde que ainda estamos supondo $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha)$ positiva.

Dito isto, escreva $v = a\mathbf{T}_\alpha + b\mathbf{N}_\alpha + c\mathbf{B}_\alpha$. Aplicando todos os produtos possíveis nos dois lados desta igualdade, e já organizando as expressões obtidas em forma de matriz, temos

$$\begin{pmatrix} \langle v, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle v, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle v, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Segue das observações feitas logo acima que a inversa desta matriz de coeficientes existe, e é a própria, de modo que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle v, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle v, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle v, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix}.$$

Particularizando, concluímos o lema. \square

Antes de aplicar o Lema A.1.9 acima para as derivadas dos vetores no referencial de Cartan, temos a:

Definição A.1.10. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. A *pseudo-torção* de α é dada por $\bar{\tau}_\alpha \doteq -\langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L$.

Observação. Note que a pseudo-torção é preservada por isometrias positivas. Além disto, na literatura, objetos análogos à nossa pseudo-torção também são chamados de *curvaturas de Cartan* de α (veja por exemplo [38] e [47]).

Teorema A.1.11. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. Então vale que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'_\alpha \\ \mathbf{N}'_\alpha \\ \mathbf{B}'_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta_\alpha \bar{\tau}_\alpha & \epsilon_\alpha \bar{\tau}_\alpha & \eta_\alpha \\ \epsilon_\alpha & \eta_\alpha \bar{\tau}_\alpha & -\epsilon_\alpha \bar{\tau}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_\alpha \\ \mathbf{N}_\alpha \\ \mathbf{B}_\alpha \end{pmatrix}.$$

Observação. Explicitamente, as matrizes de coeficientes quando α é de tipo luz ou semi-luz são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{\tau}_\alpha(\phi) & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\tau}_\alpha(\phi) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\tau}_\alpha(s) & 0 \\ 1 & 0 & -\bar{\tau}_\alpha(s) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: A primeira equação é a definição do vetor normal. Para a segunda equação, aplicando o Lema A.1.9 interpretando \mathbf{N}'_α como um vetor coluna, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_\alpha &= \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_\alpha \\ 0 \\ -\bar{\tau}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \bar{\tau}_\alpha \\ \epsilon_\alpha \bar{\tau}_\alpha \\ \eta_\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e assim obtemos a segunda linha da matriz dos coeficientes do enunciado. Analogamente para

\mathbf{B}'_{α} , temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}'_{\alpha} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha} & 0 & -\eta_{\alpha} \\ 0 & \eta_{\alpha} & -\epsilon_{\alpha} \\ -\eta_{\alpha} & -\epsilon_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{B}'_{\alpha}, \mathbf{T}_{\alpha} \rangle_L \\ \langle \mathbf{B}'_{\alpha}, \mathbf{N}_{\alpha} \rangle_L \\ \langle \mathbf{B}'_{\alpha}, \mathbf{B}_{\alpha} \rangle_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha} & 0 & -\eta_{\alpha} \\ 0 & \eta_{\alpha} & -\epsilon_{\alpha} \\ -\eta_{\alpha} & -\epsilon_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha} \\ \overline{\tau}_{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha} \\ \eta_{\alpha} \overline{\tau}_{\alpha} \\ -\epsilon_{\alpha} \overline{\tau}_{\alpha} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e obtemos a última linha. \square

Observação. Suponha que α é de tipo semi-luz. Definindo os campos $L_+(\alpha(s)) \doteq \sqrt{2}\mathbf{N}_{\alpha}(s)$ e $L_-(\alpha(s)) \doteq -\sqrt{2}\mathbf{B}_{\alpha}(s)$, obtemos um referencial de Penrose 2-normalizado e normal à α , como no Capítulo 2. Seguindo a notação da observação feita na p. 43, vemos do Teorema A.1.11 acima que os escalares de expansão de luz são dados por $\theta_+ = 0$ e $\theta_- = -\sqrt{2}$, de modo que a imagem $\alpha[I]$ é uma subvariedade marginalmente aprisionada em \mathbb{L}^3 . Segue então do Teorema 2.2.4 (p. 47) que toda curva de tipo semi-luz em \mathbb{L}^3 é plana e está contida em um plano de tipo luz. No Teorema A.1.15 (p. 104) adiante damos outra demonstração deste fato, mais adequada para este contexto.

Exemplo A.1.12. Seja $r > 0$ e considere a curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\alpha(\phi) = \left(r \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), r \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), \sqrt{r}\phi \right).$$

Vimos no Exemplo A.1.4 (p. 98) que α é de tipo luz e parametrizada por arco-fóton. Temos

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\alpha}(\phi) &= \alpha'(\phi) = \left(-\sqrt{r} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), \sqrt{r} \right) \text{ e} \\ \mathbf{N}_{\alpha}(\phi) &= \alpha''(\phi) = \left(-\cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), -\sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), 0 \right).\end{aligned}$$

Para calcular $\mathbf{B}_{\alpha}(\phi)$, note que o produto vetorial Euclidiano

$$\mathbf{T}_{\alpha}(\phi) \times_E \mathbf{N}_{\alpha}(\phi) = \left(\sqrt{r} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), -\sqrt{r} \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), \sqrt{r} \right)$$

visto em \mathbb{L}^3 é de tipo luz e futuro-dirigido, de modo que a base $(\mathbf{T}_{\alpha}(\phi), \mathbf{N}_{\alpha}(\phi))$ é sempre positiva e não é necessário reparametrizar α . Além disso, neste caso temos uma particularidade: $\mathbf{T}_{\alpha}(\phi) \times_E \mathbf{N}_{\alpha}(\phi)$ é também Lorentz-ortogonal a $\mathbf{N}_{\alpha}(\phi)$. Isso nos diz que $\mathbf{B}_{\alpha}(\phi)$ deve ser um múltiplo positivo de $\mathbf{T}_{\alpha}(\phi) \times_E \mathbf{N}_{\alpha}(\phi)$. Para que tenhamos $\langle \mathbf{B}_{\alpha}(\phi), \mathbf{T}_{\alpha}(\phi) \rangle_L = -1$, basta tomar

$$\mathbf{B}_{\alpha}(\phi) = \left(\frac{1}{2\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), -\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), \frac{1}{2\sqrt{r}} \right).$$

E finalmente temos:

$$\overline{\tau}_{\alpha}(\phi) = -\langle \mathbf{N}'_{\alpha}(\phi), \mathbf{B}_{\alpha}(\phi) \rangle_L = -\frac{1}{2r} \sin^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right) - \frac{1}{2r} \cos^2\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right) + 0 = -\frac{1}{2r}.$$

Os dois próximos resultados ilustram algumas das diferenças entre $\overline{\tau}_{\alpha}$ e τ_{α} .

Teorema A.1.13. *As únicas curvas de tipo luz planas em \mathbb{L}^3 são raios de luz.*

Demonstração: É claro que raios de luz são curvas planas e que se α não é um raio de luz, então admite uma reparametrização por arco-fóton. Assim, é suficiente ver que se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ é uma

curva de tipo luz parametrizada por arco-fóton e $\langle \alpha(\phi) - p, v \rangle_L = 0$ para todo $\phi \in I$, para certos $p, v \in \mathbb{L}^3$, então $v = \mathbf{0}$. De fato, derivando a expressão dada três vezes obtemos

$$\langle \mathbf{T}_\alpha(\phi), v \rangle_L = \langle \mathbf{N}_\alpha(\phi), v \rangle_L = \overline{\tau}_\alpha(\phi) \langle \mathbf{T}_\alpha(\phi), v \rangle_L + \langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), v \rangle_L = 0.$$

Pelo Lema A.1.9 (p. 100) segue que $v = \mathbf{0}$. □

Exemplo A.1.14. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com derivada segunda estritamente positiva e considere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\alpha(s) = (s, f(s), f(s)).$$

Vê-se que α é de tipo semi-luz com

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha(s) &= \alpha'(s) = (1, f'(s), f'(s)) \text{ e} \\ \mathbf{N}_\alpha(s) &= \alpha''(s) = (0, f''(s), f''(s)). \end{aligned}$$

Temos que

$$\mathbf{T}_\alpha(s) \times_E \mathbf{N}_\alpha(s) = (0, -f''(s), f''(s))$$

é de tipo luz e futuro-dirigido, de modo que $(\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s))$ é positiva.

Buscamos $\mathbf{B}_\alpha(s) = (a(s), b(s), c(s))$ de tipo luz, ortogonal a $\mathbf{T}_\alpha(s)$ e tal que $\langle \mathbf{B}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s) \rangle_L = -1$. Explicitamente, temos:

$$\begin{cases} a(s)^2 + b(s)^2 - c(s)^2 & = 0 \\ a(s) + f'(s)(b(s) - c(s)) & = 0 \\ f''(s)(b(s) - c(s)) & = -1 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação na segunda segue que $a(s) = f'(s)/f''(s)$. Com isto, a primeira equação se torna

$$(b(s) - c(s))(b(s) + c(s)) = b(s)^2 - c(s)^2 = -\frac{f'(s)^2}{f''(s)^2} \implies b(s) + c(s) = \frac{f'(s)^2}{f''(s)},$$

após usar a terceira equação novamente. Obtemos então

$$\mathbf{B}_\alpha(s) = \frac{1}{2f''(s)} (2f'(s), f'(s)^2 - 1, f'(s)^2 + 1).$$

Finalmente, temos que

$$\overline{\tau}_\alpha(s) = -\langle \mathbf{N}'_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s) \rangle_L = \frac{f'''(s)}{f''(s)}.$$

Em particular, veja que α está contida no plano de tipo luz $\Pi: y - z = 0$, mas pode-se tomar funções f para as quais sua pseudo-torção seja não-nula.

O Exemplo A.1.14 acima já nos diz que em geral, a pseudo-torção de uma curva de tipo semi-luz *não* é uma medida do quanto a curva deixa de ser plana. Vejamos então como a pseudo-torção controla o comportamento local da curva. Para curvas admissíveis, o sinal da torção influencia como a curva cruza o seu plano osculador (veja [27]), mas isto não vale para curvas de tipo luz ou semi-luz, considerando-se a pseudo-torção. De fato, sendo $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ de tipo luz e assumindo que $0 \in I$ e $\alpha(0) = \mathbf{0}$, temos a fórmula de Taylor

$$\alpha(\phi) = \phi \alpha'(0) + \frac{\phi^2}{2} \alpha''(0) + \frac{\phi^3}{6} \alpha'''(0) + \mathbf{R}(\phi),$$

onde $\mathbf{R}(\phi)/\phi^3 \rightarrow \mathbf{0}$ quando $\phi \rightarrow 0$. Reorganizando, para $\mathcal{F} \doteq (\mathbf{T}_\alpha(0), \mathbf{N}_\alpha(0), \mathbf{B}_\alpha(0))$ temos

$$\alpha(\phi) - \mathbf{R}(\phi) = \left(\phi + \overline{\tau}_\alpha(0) \frac{\phi^3}{6}, \frac{\phi^2}{2}, \frac{\phi^3}{6} \right)_{\mathcal{F}}.$$

Projetando, independente do sinal de $\overline{\tau}_\alpha(0)$, temos:

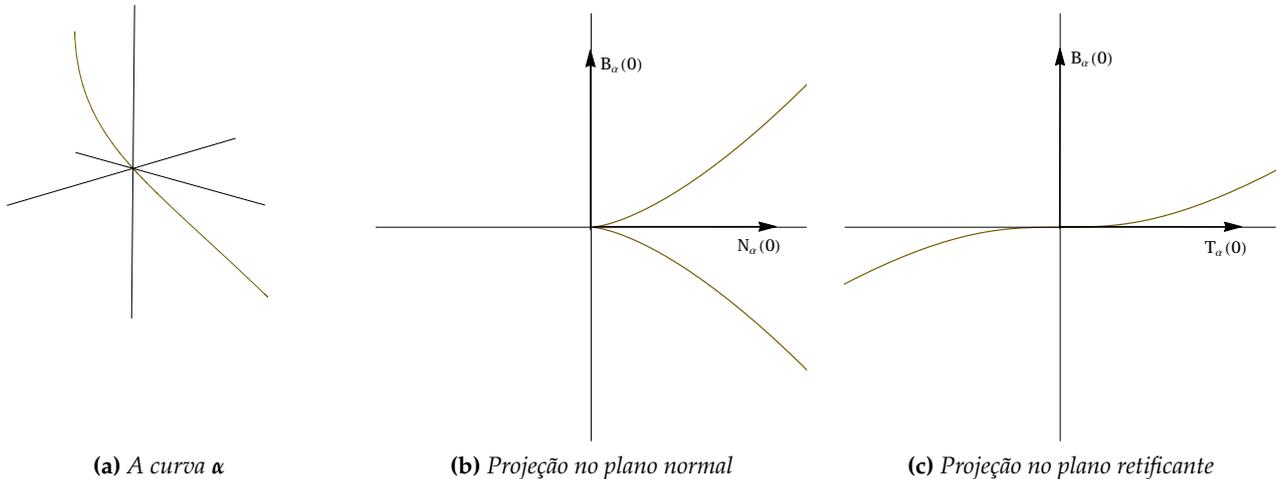


Figura A.2: A forma canônica local de α .

Observamos que aqui, mesmo que os vetores do referencial de Cartan não sejam dois a dois ortogonais, ainda tomamos a liberdade de representá-los da forma acima, uma vez que para efeitos qualitativos, só é relevante que eles sejam linearmente independentes. Assim, concluímos que qualquer que seja o sinal da pseudo-torção, a curva sempre cruza o seu plano osculador no sentido do seu vetor binormal.

Já se α for de tipo semi-luz, teremos

$$\alpha(s) - \mathbf{R}(s) = \left(s, \frac{s^2}{2} + \overline{\tau}_\alpha(0) \frac{s^3}{6}, 0 \right)_{\mathcal{F}}.$$

Esta expressão e o Exemplo A.1.14 são fortes indicativos de que a situação envolvendo curvas de tipo semi-luz na verdade é muito mais extrema:

Teorema A.1.15. *Toda curva de tipo semi-luz é plana e está contida em um plano de tipo luz.*

Demonstração: Sendo $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo semi-luz, buscamos $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathbb{L}^3$, com \mathbf{v} de tipo luz, tais que $\langle \alpha(s) - \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle_L = 0$ para todo $s \in I$. Se isto acontecer, derivando duas vezes obtemos $\langle \mathbf{N}_\alpha(s), \mathbf{v} \rangle_L = 0$, e concluímos que \mathbf{v} deve ser paralelo a $\mathbf{N}_\alpha(s)$ (dois vetores de tipo luz ortogonais são paralelos). Motivados por isto, buscamos uma função $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $\mathbf{v} = \lambda(s)\mathbf{N}_\alpha(s)$ seja constante. Isto nos leva à

$$\mathbf{0} = (\lambda'(s) + \overline{\tau}_\alpha(s)\lambda(s))\mathbf{N}_\alpha(s),$$

para todo $s \in I$. Defina \mathbf{v} deste modo tomando

$$\lambda(s) = \exp \left(- \int_{s_0}^s \overline{\tau}_\alpha(\xi) d\xi \right),$$

para algum $s_0 \in I$ fixado. Por construção, \mathbf{v} é constante e podemos então tomar $\mathbf{p} = \alpha(s_0)$. Feito

isso, a justificativa de que tais p e v satisfazem o pedido é a usual: considere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle_L$. Claramente $f(s_0) = 0$ e $f'(s) = \langle T_\alpha(s), v \rangle_L = 0$ para todo $s \in I$. \square

Assim, os teoremas 2.2.4 e A.1.15 estabelecem que as subvariedades marginalmente aprisionadas em \mathbb{L}^3 são precisamente as curvas de tipo semi-luz.

Observação. Para obter mais informações, poderíamos prosseguir com a nossa análise da forma canônica local dada acima, considerando a única projeção relevante: a curva $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(s) = \left(s, \frac{s^2}{2} + \bar{\tau}_\alpha(0) \frac{s^3}{6} \right).$$

Seria natural procurarmos uma relação entre a curvatura de γ em 0 e a pseudo-torção $\bar{\tau}_\alpha(0)$. O detalhe, entretanto, é que como $T_\alpha(0)$ é de tipo espaço, $N_\alpha(0)$ é de tipo luz e são ortogonais, para estudar γ devemos considerar o produto dado por $\langle\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle\rangle \doteq x_1 y_1$ (ou, em outras palavras, a métrica de \mathbb{L}^3 induzida no plano de tipo luz que contém α). Sendo tal métrica degenerada, a expressão

$$\frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s))}{\|\gamma'(s)\|^3} = 1 + \bar{\tau}_\alpha(0)s$$

não pode ser interpretada como a curvatura de γ . Com efeito, não há uma noção razoável de curvatura neste contexto, já que:

- toda curva da forma $(s, f(s))$, onde f é uma função suave, pode ser levada no eixo x via a função $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x, y - f(x))$. A derivada $DF(x, y)$ é uma transformação linear ortogonal com respeito a $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ e, portanto, F seria uma “isometria” deste plano¹. Ou seja, todos os gráficos de funções suaves seriam congruentes. Dado que toda curva de tipo espaço pode ser parametrizada como gráfico sobre o “eixo x ” e as de tipo luz são retas verticais, vemos que não é possível ter um invariante geométrico associado a cada curva.
- para métricas degeneradas, em geral perde-se a unicidade da conexão de Levi-Civita (livre de torção e que paraleliza a métrica). A conexão de Levi-Civita ∇ da métrica usual de \mathbb{R}^2 é também “uma” conexão de Levi-Civita para o plano degenerado $(\mathbb{R}^2, \langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle)$ agora considerado. Por exemplo, mostra-se que a conexão $\tilde{\nabla}$ definida por $\tilde{\nabla}_X Y \doteq \nabla_X Y + \langle\langle X, Y \rangle\rangle \partial_y$ é outra conexão de Levi-Civita. Assim, diferentes “conexões de Levi-Civita” dão origem à diferentes geometrias², e não há mais uma conexão canônica. Em outras palavras, ao buscar invariantes, não há motivo para preferir $\gamma'' = \nabla_{\gamma'} \gamma'$ à $\tilde{\nabla}_{\gamma'} \gamma'$, onde $\tilde{\nabla}$ é qualquer outra conexão de Levi-Civita para a métrica.

Felizmente, os pontos levantados acima não são um empecilho para cumprimos o prometido:

Teorema A.1.16 (Teorema Fundamental, segunda versão). *Sejam $\bar{\tau}: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $p_0 \in \mathbb{L}^3$, $s_0, \phi_0 \in I$ e (T_0, N_0, B_0) uma base positiva de \mathbb{L}^3 tal que B_0 é de tipo luz e (T_0, N_0) seja uma base positiva de um plano de tipo luz. Então:*

(i) *se T_0 é de tipo luz, N_0 é unitário e $\langle T_0, B_0 \rangle_L = -1$, existe uma única curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ de tipo luz parametrizada por arco-fóton tal que*

- $\alpha(\phi_0) = p_0$;

¹Na verdade, todas as “isometrias” são da forma $F(x, y) = (\pm x + c, g(x, y))$ para algum $c \in \mathbb{R}$ e g suave tal que a derivada parcial $\partial g / \partial y$ nunca se anule.

²Mas, incrivelmente, é possível que duas métricas pseudo-Riemannianas distintas possuam a mesma conexão de Levi-Civita. Por exemplo, se $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade Riemanniana e $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ é suave, com Hessiano covariante identicamente nulo e $\|\text{grad } \varphi\| \neq 1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi \doteq \langle \cdot, \cdot \rangle - d\varphi \otimes d\varphi$ é uma métrica pseudo-Riemanniana cuja conexão de Levi-Civita é a mesma que a da métrica original: $\nabla^\varphi = \nabla$. Prova: fórmula de Koszul.

- $(\mathbf{T}_\alpha(\phi_0), \mathbf{N}_\alpha(\phi_0), \mathbf{B}_\alpha(\phi_0)) = (\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$;
- $\bar{\alpha}_\alpha(\phi) = \bar{\alpha}(\phi)$ para todo $\phi \in I$.

(ii) se \mathbf{T}_0 é unitário, \mathbf{N}_0 é de tipo luz e $\langle \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0 \rangle_L = -1$, existe uma única curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ de tipo semi-luz tal que

- $\alpha(s_0) = \mathbf{p}_0$;
- $(\mathbf{T}_\alpha(s_0), \mathbf{N}_\alpha(s_0), \mathbf{B}_\alpha(s_0)) = (\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$;
- $\bar{\alpha}_\alpha(s) = \bar{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$.

Demonstração: Trataremos apenas o primeiro caso. Como na demonstração do Teorema Fundamental anterior, considere o seguinte problema de valor inicial em \mathbb{R}^9 :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \mathbf{T}'(\phi) \\ \mathbf{N}'(\phi) \\ \mathbf{B}'(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{\alpha}(\phi) & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}(\phi) \\ \mathbf{N}(\phi) \\ \mathbf{B}(\phi) \end{pmatrix} \\ \text{e } (\mathbf{T}(\phi_0), \mathbf{N}(\phi_0), \mathbf{B}(\phi_0)) = (\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0). \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade para sistemas de equações diferenciais ordinárias, existe uma única solução $(\mathbf{T}(\phi), \mathbf{N}(\phi), \mathbf{B}(\phi))$ do sistema. Afirmamos que tal solução continua satisfazendo as condições da hipótese para todo $\phi \in I$, isto é: $\mathbf{T}(\phi)$ e $\mathbf{B}(\phi)$ são de tipo luz, $\mathbf{N}(\phi)$ é unitário e ortogonal a $\mathbf{B}(\phi)$, e ainda vale que $\langle \mathbf{T}(\phi), \mathbf{B}(\phi) \rangle_L = -1$. Com efeito, consideramos agora o seguinte problema de valor inicial para a curva $\mathbf{a}: I \rightarrow \mathbb{R}^6$:

$$\begin{cases} \mathbf{a}'(\phi) = A(\phi)\mathbf{a}(\phi), \\ \mathbf{a}(\phi_0) = (0, 1, 0, 0, -1, 0) \end{cases}$$

onde

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\alpha}(\phi) & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\alpha}(\phi) \\ \bar{\alpha}(\phi) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 1 & 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se as coordenadas de $\mathbf{a}(\phi)$ são os produtos escalares³ entre os vetores $\mathbf{T}(\phi), \mathbf{N}(\phi), \mathbf{B}(\phi)$, soluções do problema de valor inicial anterior, concluímos que o vetor constante $\mathbf{a}_0 = (0, 1, 0, 0, -1, 0)$ é a única solução com as condições iniciais dadas, donde segue-se nossa afirmação.

Feito isto, definimos

$$\alpha(\phi) \doteq \mathbf{p}_0 + \int_{\phi_0}^{\phi} \mathbf{T}(\xi) d\xi.$$

Claramente temos $\alpha(\phi_0) = \mathbf{p}_0$ e $\alpha'(\phi) = \mathbf{T}(\phi)$, donde α é de tipo luz. Derivando novamente obtemos $\alpha''(\phi) = \mathbf{N}(\phi)$, de modo que α está parametrizada por arco-fóton. Assim temos que $\mathbf{T}_\alpha(\phi) = \mathbf{T}(\phi)$ e $\mathbf{N}_\alpha(\phi) = \mathbf{N}(\phi)$, e a positividade de todas as bases envolvidas nos garante que $\mathbf{B}_\alpha(\phi) = \mathbf{B}(\phi)$ também.

Com isto, derivar $\mathbf{N}_\alpha(\phi) = \mathbf{N}(\phi)$ nos dá

$$\bar{\alpha}_\alpha(\phi)\mathbf{T}_\alpha(\phi) + \mathbf{B}_\alpha(\phi) = \bar{\alpha}(\phi)\mathbf{T}(\phi) + \mathbf{B}(\phi),$$

e das igualdades anteriores obtidas segue que $\bar{\alpha}_\alpha(\phi) = \bar{\alpha}(\phi)$ para todo $\phi \in I$.

³Em ordem, $\mathbf{a}(\phi) = (\langle \mathbf{T}(\phi), \mathbf{T}(\phi) \rangle_L, \langle \mathbf{N}(\phi), \mathbf{N}(\phi) \rangle_L, \langle \mathbf{B}(\phi), \mathbf{B}(\phi) \rangle_L, \langle \mathbf{T}(\phi), \mathbf{N}(\phi) \rangle_L, \langle \mathbf{T}(\phi), \mathbf{B}(\phi) \rangle_L, \langle \mathbf{N}(\phi), \mathbf{B}(\phi) \rangle_L)$.

Finalmente, para verificar a unicidade de α , suponha que $\beta: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ seja outra curva de tipo luz, parametrizada por arco-fóton tal que $\alpha(\phi_0) = \beta(\phi_0)$, tendo o mesmo referencial de Cartan que α em ϕ_0 , e com a mesma pseudo-torção em todos os pontos. Tais condições implicam que ambos $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{B}_\alpha(\phi))$ e $(\mathbf{T}_\beta(\phi), \mathbf{N}_\beta(\phi), \mathbf{B}_\beta(\phi))$ são soluções de um mesmo problema de valor inicial, e segue disto em particular que $\mathbf{T}_\alpha(\phi) = \mathbf{T}_\beta(\phi)$ para todo $\phi \in I$, de modo que α e β diferem por uma constante. Mas $\alpha(\phi_0) = \beta(\phi_0)$ garante que tal constante é zero, donde concluímos a unicidade desejada. \square

Corolário A.1.17. *Duas curvas, ambas de tipo luz ou semi-luz, cujos planos osculadores estejam positivamente orientados as quais tenham mesma pseudo-torção diferem por uma transformação de Poincaré positiva de \mathbb{L}^3 .*

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ duas curvas como no enunciado. Fixe qualquer $t_0 \in I$. Como as bases para os planos osculadores são positivamente orientadas, as bases de Cartan para as duas curvas estão nas condições da Proposição 1.1.19 (p. 14), que nos permite obter $F \in E_1(3, \mathbb{R})$, tal que $F(\alpha(t_0)) = \beta(t_0)$, $DF(\alpha(t_0))(\mathbf{T}_\alpha(t_0)) = \mathbf{T}_\beta(t_0)$, e analogamente para N e B . Tal F é na verdade positiva (pois sua parte linear leva uma base positiva em outra base positiva, ou seja, é um elemento de $O_1^+(3, \mathbb{R})$), e portanto preserva pseudo-torções, de modo que as curvas $F \circ \alpha$ e β estão agora nas condições do Teorema A.1.16 acima. Concluímos que $\beta = F \circ \alpha$, como queríamos. \square

Referências Bibliográficas

Livros

- [1] Steenrod, N.; *The Topology of Fiber Bundles*, Princeton University Press, 1951.
- [2] Hoffman K.; Kunze, R.; *Linear Algebra*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1971.
- [3] Milnor, J. W.; *Morse Theory*, Princeton University Press, 1963.
- [4] Hawking, S.; Ellis, G.; *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1973.
- [5] Greub, W. H.; *Linear Algebra*, Springer-Verlag, 1975.
- [6] Helgason, S.; *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.
- [7] Chen, B. Y.; *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, World Scientific, 1978.
- [8] Warner, F. W.; *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983.
- [9] Osserman, R.; *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover, 1986.
- [10] Dajczer, M.; *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series 13, Publish or Perish, Inc., 1990.
- [11] Gamkrelidze, R. V. (Ed.); *Encyclopaedia of Mathematical Sciences Volume 28 - Geometry I*, Springer-Verlag, 1991.
- [12] Naber, G. L.; *The Geometry of Minkowski Spacetime: An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity*, Springer-Verlag, 1992.
- [13] Beem, J. K.; Ehrlich, P. E.; Easley, K. L.; *Global Lorentzian Geometry*, CRC Press, 1996.
- [14] Lee, J. M.; *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, GTM 176, Springer, 1997.
- [15] Chen, B.; *Riemannian Submanifolds*, in Handbook of Differential Geometry vol. 1, p. 187-418, 2000.
- [16] Carroll, S.; *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*, Pearson Education, 2004.
- [17] do Carmo, M. P.; *Geometria Riemanniana*, IMPA, 2005.
- [18] O'Neill, B.; *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 2006.
- [19] Lee, J. M.; *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM 218, Springer, 2006.
- [20] Foster, J.; Nightingale, J. D.; *A Short Course in General Relativity*, Springer, 2006.

- [21] Christodoulou, D.; *The Formation of Black Holes in General Relativity*, European Mathematical Society, 2008.
- [22] Javaloyes, M. A.; Sánchez, M.; *An Introduction to Lorentzian Geometry and its Applications*, XVI Escola de Geometria Diferencial, São Paulo, 2010.
- [23] Bär, C.; *Elementary Differential Geometry*, Cambridge University Press, 2010.
- [24] Bettiol, R. G.; *Generic Properties of Semi-Riemannian Geodesic Flows*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2010.
- [25] Anciaux, H.; *Minimal Submanifolds in Pseudo-Riemannian Geometry*, World Scientific, 2011.
- [26] Chen, B.; *Pseudo-Riemannian Geometriy, δ -invariants and Applications*, World Scientific, 2011.
- [27] Terek, I.; Lymberopoulos, A.; *Introdução à Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. A ser publicado.

Artigos e periódicos

- [28] Montgomery, D.; Yang, C. T.; *The existence of a slice.*, Ann. Math. 65, p. 108-116, 1957.
- [29] Penrose, R.; *Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*, Phys. Rev. Lett. 14, p. 57-59, 1965.
- [30] O'Neill, B.; *Isotropic and Kähler immersions*, Canadian Journal of Mathematics 17, p. 907-915, 1965.
- [31] Erbacher, J.; *Reduction of the codimension of an isometric immersion*, Journal of Differential Geometry 5, p. 333-340, 1971.
- [32] Abe, K.; Magid, M. A.; *Relative Nullity Foliations and Indefinite Isometric Immersions*, Pacific Journal of Mathematics 124, n° 1, 1986.
- [33] Chen, B. Y.; *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow Journal of Mathematics 17, p. 169-188, 1991.
- [34] Dimitric, I.; *Submanifolds of \mathbb{E}^m with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20, p. 53-65, 1992.
- [35] Ishikawa, S.; *Biharmonic W-surfaces in 4-dimensional pseudo-Euclidean space*, Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A. Math. 46, p. 269-286, 1992.
- [36] Chen, B. Y.; *A report on submanifolds of finite type*, Soochow Journal of Mathematics 22, n° 2, p. 117-336, 1996.
- [37] Chen, B. Y.; Ishikawa, S.; *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math. 52, p. 167-185, 1998.
- [38] Çoken, A. C.; Çiftçi, U.; *On The Cartan Curvatures of a Null Curve in Minkowski Spacetime*, Geometriae Dedicata 114, p. 71-78, 2005.
- [39] Haesen, S.; Ortega, M.; *Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*, Classical and Quantum Gravity 24, 2007.
- [40] Chen, B.; Van der Veken, J.; *Marginally Trapped Surfaces in Lorentzian Space Forms with positive relative nullity*, Classical and Quantum Gravity 24, vol. 3, 2007.

- [41] Chen, B.; *Classification of Marginally Trapped Lorentzian flat surfaces in \mathbb{E}_2^4 and its applications to biharmonic surfaces*, J. Math. Anal. Appl. 348, p. 861-875, 2008.
- [42] Chen, B.; *Classification of Marginally Trapped Surfaces. Symposium on the Differential Geometry of Submanifolds*, p. 51-66, 2008.
- [43] Chen, B. Y.; *Black holes, marginally trapped surfaces and quasi-minimal surfaces*, Tamkang Journal of Mathematics 40, n° 4, p. 313-341, 2009.
- [44] Chrusciel, P. T.; Galloway, J. G.; Pollack, D.; *Mathematical General Relativity: A Sampler*, Bull. Amer. Math. Soc. 47, p. 567-638, 2010.
- [45] Chen, B.; Yang, D.; *Addendum to "Classification of Marginally Trapped Lorentzian flat surfaces in \mathbb{E}_2^4 and its applications to biharmonic surfaces"*, J. Math. Anal. Appl. 361, p. 280-282, 2010.
- [46] Cabrerizo, J. L.; Fernández, M.; Gómez, J. S.; *Isotropy and marginally trapped surfaces in a space-time*, Classical and Quantum Gravity 27, IOP Publishing, 2010.
- [47] Sakaki, M.; *Bi-null Cartan curves in semi-Euclidean spaces of index 2*, Beitr Algebra Geom. 53, p. 421-436, 2012.
- [48] Palomo, F. J.; Romero, A.; *On spacelike surfaces in four-dimensional Lorentz-Minkowski spacetime through a light cone*, Proceeding of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics 143, Issue 4, p. 881-892, 2013.
- [49] Anciaux, H.; *Marginally Trapped Submanifolds in Space Forms with Arbitrary Signature*, Pacific Journal of Mathematics 272, n° 2, p. 257-274, 2014.
- [50] Le, P.; *The Intersection of a Hyperplane with a Lightcone in the Minkowski Spacetime*, eprint at arXiv:1601.01567, <https://arxiv.org/pdf/1601.01567.pdf>, 2016.
- [51] Mendes, A.; *Rigidity of Marginally Outer Trapped (Hyper)surfaces with negative σ -constant*, eprint at arXiv:1609.01579, <https://arxiv.org/pdf/1609.01579.pdf>, 2016.
- [52] Milousheva, V.; Turgay, Nurettin C.; *Quasi-minimal Lorentz surfaces with pointwise 1-type Gauss map in pseudo-Euclidean 4-space*, Journal of Geometry and Physics 106, p. 171-183, 2016.

Índice Remissivo

- 1-formas de conexão, 57
- 2-formas de curvatura, 57
- Arco-fóton (parâmetro), 98
- Base positiva (para um plano de tipo luz), 99
- Caráter causal, 8
- Co-indicador de uma curva, 99
- Cone de luz, 8
- Conexão
 - de Koszul, 21
 - de Levi-Civita, 25
 - normal, 32
- Contração (de um tensor), 22
- Coordenadas de Rindler, 69
- Curva
 - admissível, 97
 - bi-regular, 97
- Curvatura
 - de Cartan, *veja também* pseudo-torção
 - de Ricci, 27
 - de Riemann, 26
 - escalar, 27
 - extrínseca, 30
 - Gaussiana, 27
 - geodésica, 68
 - normal, 32
 - seccional, 27
- Derivação tensorial, 22
- Derivada covariante (de um campo tensorial), 23
- Derivada exterior, 58
- Desigualdade
 - de Cauchy-Schwarz reversa, 12
 - triangular reversa, 12
- Escalares de expansão de luz, 44
- Espaço
 - de anti-de Sitter, 21
 - de de Sitter, 21
 - de Lorentz-Minkowski, 8
 - de nulidade relativa, 59
 - pseudo-Euclideano de índice ν , 7
- Exponencial (de Riemann), 62
- Fibrado
 - normal, 29
 - vetorial, 21
- Forma Canônica Local
 - de uma curva de tipo luz, 104
- Formas espaciais pseudo-Riemannianas, 27
- Função
 - de isotropia, 50
 - harmônica, 28
- Futuro-dirigido, 99
- Gradiente (de uma função suave), 24
- Gram-Schmidt, processo de, 11
- Grupo
 - de Klein, 16
 - de Lorentz, 14
 - de Poincaré, 14
- Hessiano covariante, 23
- Horocírculo, 69
- Identidade
 - de índice ν , 7
 - de Bianchi (primeira), 26
 - de polarização, 14
- Imersão isométrica, 29
- Indicador
 - de um vetor, 8
 - de uma curva, 99
- Índice (de uma forma bilinear), 7
- Isometria
 - (de \mathbb{R}_ν^n), 13
 - (entre variedades pseudo-Riemannianas), 27
- Isomorfismos musicais, 23
- Laplaceano, 28
- Lei da Inércia - Sylvester, 10

- Lema de Riesz, 10
- Métrica pseudo-Riemanniana, 20
- Movimento rígido, *veja também* isometria
- Norma, 7
- Operador de Weingarten, 30
- Ortocrônico, 16
- Partes espacial e temporal, 15
- Passado-dirigido, *veja também* futuro-dirigido
- Plano osculador, 98
- Primeiro espaço normal, 54
- Produto
 - distorcido, 21
 - escalar, 7
 - semi-direto (de grupos), 14
 - vetorial, 17
- Pseudo-torção, 101
- Recobrimento pseudo-Riemanniano, 55
- Referencial
 - de Cartan, 100
 - de Penrose, 41
- Símbolos de Christoffel, 25
- Soma de Whitney, 29
- Subvariedade
 - w-marginalmente aprisionada, 35
 - crítica, 35
 - isotrópica, 50
 - marginalmente aprisionada, 35
 - pseudo-umbílica, 31
 - totalmente geodésica, 30
 - totalmente umbílica, 31
- Tensor de tipo curvatura, 51
- Teorema
 - Fundamental para Curvas Admissíveis, 97
 - Fundamental para curvas de tipo luz e semi-luz, 105
- Tipo
 - causal, 8
 - espaço, 8
 - luz, 8
 - semi-luz, 98
 - tempo, 8
- Traço de uma aplicação bilinear., 19
- Transformação
 - de Lorentz, 14
 - de Poincaré, 14
- Triedro de Frenet-Serret, 97
- Variedade
 - diferenciável, 20
 - pseudo-Riemanniana, 20
- Vetor
 - Binormal, 99
 - curvatura média, 30
 - Normal, 99
 - Tangente, 99
- Warped product, *veja também* produto distorcido